EXERCICE 4 **8 points**

Commun à tous les candidats

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1.$$

a. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n.

b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\ ;\ +\infty[$. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

a. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ et le point B_n de coordonnées $(n\ ;\ 0)$.

b. Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

c. Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.

d. Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).

3. **a.** Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.

b. Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

c. Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).

d. Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite. Établir que : $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ.

4. On désigne par $\mathcal{D}_n$ le domaine délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = \mathrm{e}$.

a. Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ en fonction de α_n et montrer que cette aire est égaie à $\dfrac{\alpha_n^2}{n}$.

b. Établir que :

$$(\mathrm{e} - \alpha_n) \ln \alpha_n \leqslant \frac{\alpha_n^2}{n} \leqslant (\mathrm{e} - \alpha_n).$$

c. En déduire un encadrement de $n(\mathrm{e} - \alpha_n)$.

d. La suite de terme général $n(\mathrm{e} - \alpha_n)$ est-elle convergente ? Ce résultat permet-il d'apprécier la rapidité de la convergence de la suite (α_n) ?