

Exercice type 3. Suite arithmético-géométrique. Au 1er janvier 2005, une ville en pleine expansion avait une population de 100 000 habitants.

Un bureau d'étude fait l'hypothèse qu'à partir du 1er janvier 2005 :

- le nombre d'habitants de la ville augmente chaque année de 5% du fait des naissances et de décès.
- du fait des mouvements migratoires, 4 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note u_n le nombre d'habitants de cette ville au 1er janvier de l'année 2005 + n , de sorte que $u_0 = 100\,000$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Justifier que pour tout $n : u_{n+1} = 1,05u_n + 4\,000$.
3. Pour tout n on pose $v_n = u_n + 80\,000$,
 - (a) Calculer v_0 .
 - (b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.
 - (c) Exprimer v_n en fonction de n , puis en déduire que $u_n = 180\,000 \times 1,05^n - 80\,000$,
 - (d) Calculer la limite de la suite (u_n) .
4. Quel sera le nombre d'habitants prévisible de la ville au 1er janvier 2020 ?
5. A partir de quelle année la population de cette ville dépassera-t-elle 200 000 habitants ? (on utilisera la fonction \ln)