

## EXERCICE 2

5 points

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de la figure donnée en annexe. Cette annexe sera à rendre avec la copie.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Le quadrilatère MNPQ est un quadrilatère non croisé et de sens direct. Les triangles MRN, NSP, PTQ et QUM sont des triangles rectangles isocèles, extérieurs au quadrilatère MNPQ et de sens direct (les sommets des angles droits étant respectivement les points R, S, T et U).

**Partie A**

On désigne par  $m, n, p$  et  $q$ , les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Soit  $f$  la similitude directe de centre M qui transforme N en R.
  - a. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude  $f$ .
  - b. On désigne par  $r$  l'affixe du point R. Démontrer que 
$$r = \frac{1+i}{2}m + \frac{1-i}{2}n$$
, où  $i$  désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$  (on pourra éventuellement utiliser l'écriture complexe de la similitude  $f$ ).  
On admettra que l'on a également les résultats 
$$s = \frac{1+i}{2}n + \frac{1-i}{2}p, t = \frac{1+i}{2}p + \frac{1-i}{2}q \text{ et } u = \frac{1+i}{2}q + \frac{1-i}{2}m$$
, où  $s, t$  et  $u$  désignent les affixes respectives des points S, T et U.
2. Démontrer que les quadruplets (M, N, P, Q) et (R, S, T, U) ont le même isobarycentre.
3.
  - a. Démontrer l'égalité  $u - s = i(t - r)$ .
  - b. Que peut-on en déduire pour les longueurs des segments [RT] et [SU], d'une part, et pour les droites (RT) et (SU), d'autre part ?

**Partie B**

Cette partie sera traitée sans utilisation des nombres complexes.

1. Démontrer, en utilisant les résultats établis dans la **partie A**, qu'il existe une unique rotation  $g$  qui transforme R en S et T en U.
2. Décrire comment construire géométriquement le point  $\Omega$ , centre de la rotation  $g$ . Réaliser cette construction sur la figure de l'annexe.

ANNEXE

À rendre avec la copie

Figure de l'exercice 2 de spécialité

