

**EXERCICE 4 4 points****Commun à tous les candidats**

On considère les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  définies pour tout entier naturel  $n$  non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt \qquad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt$$

1a. Montrer que la suite  $(x_n)$  est à termes positifs.

b. Étudier les variations de la suite  $(x_n)$ .

c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite  $(x_n)$  ?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $x_n \leq \frac{1}{n+1}$

b. En déduire la limite de la suite  $(x_n)$ .

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$ .

b. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ .

4) On admet que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$ .

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ny_n$ .