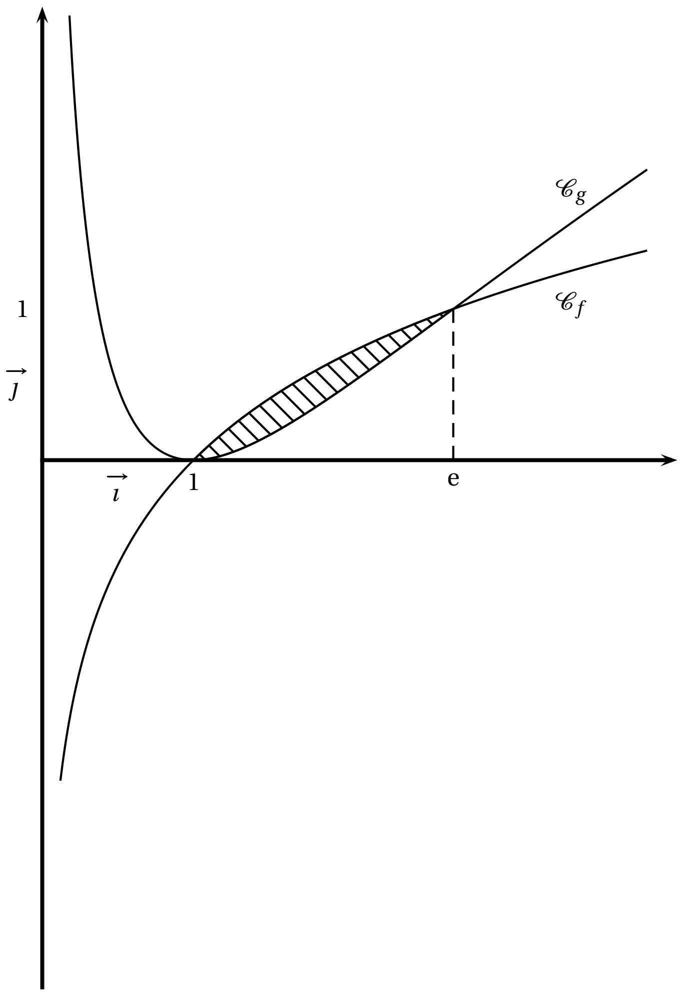
EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln x)^2.$$



1. On cherche à déterminer l'aire $\mathscr{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.
   On note $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x$.
   - **a.** Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.
   - **b.** Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = \mathrm{e} - 2I$.
   - **c.** En déduire J.
   - **d.** Donner la valeur de $\mathscr{A}$.

2. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*
Pour x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,\text{e}]$, on note M le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.