EXERCICE 2 **5 points**

Exercice de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 4 cm).
Soit Ω le point d'affixe 2.
On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.

a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

b. Montrer que l'écriture complexe de σ est : $z \longmapsto \frac{1+\text{i}}{2}z + 1 - \text{i}$.

c. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z - z' = \text{i}\left(2 - z'\right)$.

2. **a.** **Question de cours**

• *Prérequis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques des modules et des arguments.*

Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q - a = \text{i}(p - a)$.

b. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Ω.

3. Soit A_0 le point d'affixe $2 + \text{i}$.
On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :

$$\text{pour tout entier naturel} \quad n,\ A_{n+1} = \sigma\left(A_n\right).$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par :

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \text{e}^{\text{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2.$$

b. Déterminer l'affixe de A_5.

4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait :
pour $n \geqslant n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.