Concours Fesic mai 2008

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère trois points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 1 + \text{i}\sqrt{3},\ z_{\text{B}} = 1 + \text{i}, \quad \text{et} \quad z_{\text{C}} = 2\text{i}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \text{i}\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

a. On a $\arg(z_{\text{C}}) = \dfrac{\pi}{12}$.

b. L'écriture algébrique de $\dfrac{z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}}$ est : $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

c. L'écriture trigonométrique de $\dfrac{z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}}$ est : $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$.

d. On a : $\dfrac{\text{OA}}{\text{OB}} = \dfrac{\text{OC}}{\sqrt{2}}$.

EXERCICE 2

On considère deux réels a et b et l'équation [E] : $z^4 + az^3 + bz^2 + az + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

a. Si z_0 est solution de [E] alors $\overline{z_0}$ et $\dfrac{1}{z_0}$ le sont aussi.

b. Si $1 + 2\text{i}$ est solution de [E] alors $\dfrac{1}{1-2\text{i}}$ aussi.

c. Le changement de variable $Z = z + \dfrac{1}{z}$ conduit à résoudre [E′] : $Z^2 + aZ + b = 0$.

d. On peut factoriser l'expression $z^4 + az^3 + bz^2 + az + 1$ par deux polynômes de degré deux à coefficients réels.

EXERCICE 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On appelle A le point d'affixe 2, B le point d-affixe $-3-\text{i}$ et C le point d'intersection de (OB) avec la médiatrice de [OA]. On considère dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes [E$_1$] et [E$_2$] :

$$[\text{E}_1] : |z| = |z-2| \quad \text{et} \quad [\text{E}_2] : \arg(z) = \arg(z+3+\text{i}).$$

a. L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie [E$_1$] est la médiatrice de [OA].

b. L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie [E$_2$] est le segment [OB], exclusions faites de O et B.

c. L'affixe du point C vérifie simultanément [E$_1$] et [E$_2$].

d. Le point C a pour coordonnées $\left(1\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$

EXERCICE 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal. Soient $a \in \mathbb{R}$, $(\mathscr{C})$ la courbe représentant la fonction exponentielle et (T) la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse a. Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \text{e}^x - \text{e}^x(x+1-a)$ et (Γ) sa courbe représentative dans le même repère.

a. Une équation de (T) est : $y = \text{e}^a(x+1-a)$.

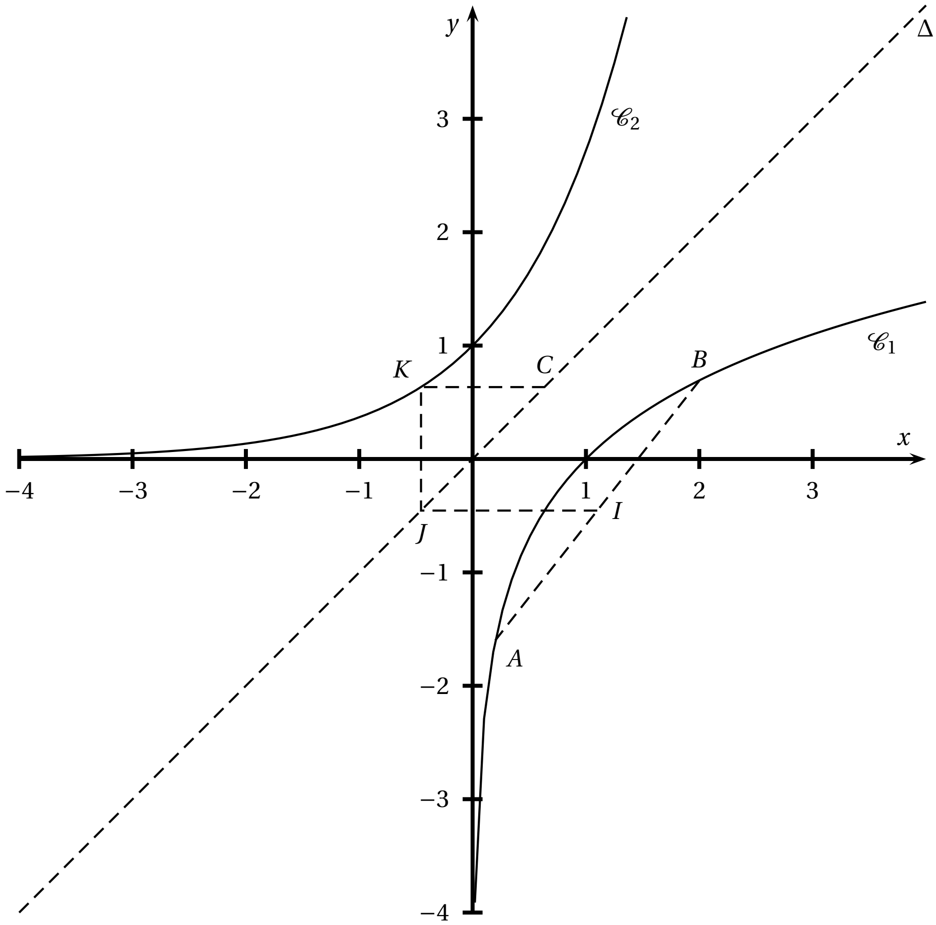
b. La dérivée f' de f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c. $(\mathscr{C})$ est au-dessous de (T) avant le point $\mathrm{A}(a\,;\,\mathrm{e}^{a})$ est au-dessus de (T) après A.

d. À tout réel x_0 on associe les points M_0 de $(\mathscr{C})$ et N_0 de (Γ) d'abscisse commune x_0. x_0 étant fixé, il existe une valeur de a telle que $(\mathscr{C})$ et (Γ) possèdent des tangentes parallèles respectivement en M_0 et N_0.

EXERCICE 5

Dans le repère orthonormal ci-dessous sont représentées les courbes des fonctions logarithme népérien, exponentielle et identité ($x \longmapsto x$).



a et b sont deux réels strictement positifs et A et B sont deux points de $\mathscr{C}_1$ d'abscisses respectives a et b.

On appelle I le milieu de $[AB]$.

On notera ceci : $J \in \Delta, K \in \mathscr{C}_2$, les droites (IJ) et (KC) sont parallèles à l'axe des abscisses ; la droite (JK) est parallèle à l'axe des ordonnées.

a. Le point I a les coordonnées $\left(\dfrac{a+b}{2}\ ;\ \ln\left(\sqrt{ab}\right)\right)$.

b. L'abscisse de C est $\mathrm{e}^{\sqrt{ab}}$.

c. La tangente à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse $\dfrac{a+b}{2}$ est parallèle à la droite Δsi et seulement si $a+b=2$.

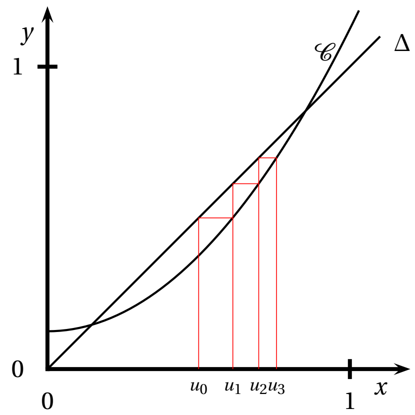
d. Le symétrique de A par rapport àΔ a pour coordonnées $(\ln a\ ;\ a)$.

EXERCICE 6

a. Afin de résoudre l'inéquation $\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2x}<0$, on utilise le raisonnement suivant : « Si x est une solution, alors $x \in \mathbb{R}$ et on a $\mathrm{e}^{x}-\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}}<0$. Le changement de va-

riable $X = \mathrm{e}^x$ donne $X - \dfrac{2}{X} < 0$, soit $\dfrac{X^2-2}{X} < 0$. Or on a $X = \mathrm{e}^x > 0$. Il faut donc $X^2 - 2 < 0$, soit aussi $\left(X - \sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2}\right) < 0$. On en déduit $-\sqrt{2} < X < \sqrt{2}$, donc $-\sqrt{2} < \mathrm{e}^x < \sqrt{2}$.
ln étant une fonction croissante, on obtient $x < \ln 2$. Ces conditions nécessaires sont suffisantes. Solution : $x < \ln 2$.
Ce raisonnement est exact.

b. On considère la suite définie par :
$u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{1}{8}$.
On désigne par C la courbe représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{8}$ et on désigne par Δ la droite d'équation $y = x$. Afin de construire les quatre premiers termes de la suite u, on a réalisé la construction ci-contre.
Cette construction est exacte.



c. On considère la suite u et la fonction f présentées à l'item **b.**
Afin de montrer que u est croissante, on utilise le raisonnement par récurrence suivant :
« Soit P(n) l'inéquation : $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant 0$.
Initialisation : on a $u_1 \geqslant u_0 \geqslant 0$, donc P(0) est vraie.
Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que P(p) soit vraie. Alors $u_{p+1} \geqslant u_p \geqslant 0$. Comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et ne prend que des valeurs positives, alors $f\left(u_{p+1}\right) \geqslant f\left(u_p\right) \geqslant$f(0), soit $u_{p+2} \geqslant u_{p+1} \geqslant 0$. Donc P$(p+1)$ est vraie.
Conclusion : De ces deux assertions et d'après le théorème de raisonnement par récurrence, je déduis que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$, ce qui prouve que u est croissante.
Ce raisonnement est exact.

d. On considère la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ -3] \cup [1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.
On cherche à savoir si la courbe $\mathscr{C}$ représentant f possède une tangente au point A(1 ; 0). On utilise pour cela le raisonnement suivant : « Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en A est donnée par $y = (x-1)f'(1) + f(1)$.
Or on a $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$, donc $f'(1)$ n'existe pas et donc f n'est pas dérivable en 1. On en déduit que $\mathscr{C}$ ne possède pas de tangente en A. »
Ce raisonnement est exact.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$. On appelle D l'ensemble de définition de f.

a. f est dérivable sur $D = [0\ ;\ +\infty[$.

b. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c. Quel que soit $x \in D$, $f(x) \in \left[0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$.

d. L'équation $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ admet une unique solution sur D.

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$. On appelle D l'ensemble de définition de f et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a. $D =]-\infty\,;\,-1[$;

b. f admet des primitives sur $]-\infty\,;\,-1[$; l'une d'elles est la fonction F définie sur $]-\infty\,;\,-1[$ par

$$F(x) = (1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln x.$$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} xf(x) = 1$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}*$. On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{2}{n(n+1)} + \ln(n+1)$.

EXERCICE 9

Soit f une fonction continue et positive sur $[0\,;\,+\infty[$.
Soient F et G les fonctions définies sur $[0\,;\,+\infty[$ respectivement par :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) = x\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On désigne par Γ la représentation graphique de f dans un repère du plan.

a. $G(0) = G(1)$.

b. G est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, on a $G'(x) = F(x) + xf(x)$.

c. On ne peut pas prévoir le sens de variation de G sur $[0\,;\,+\infty[$ avec les seules hypothèses de l'énoncé.

d. L'aire de la surface limitée par les droites d'équations $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et la courbe Γ se calcule par $F(2) + F(0)$.

EXERCICE 10

a. La solution de l'équation différentielle $2y' + y = 0$ qui prend la valeur 5 en 1 est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5\mathrm{e}^{\frac{1-x}{2}}$.

b. L'ensemble des solutions de l'équation $\ln(4-x) \leqslant 1$ est $[4-\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

c. Soient $a \in \mathbb{R}_+*$ et $\mathscr{C}$ la courbe représentant la fonction ln dans un repère orthonormal du plan d'origine O. Soient A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a, B le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses et C le point d'intersection de la tangente à $\mathscr{C}$ en A avec l'axe des abscisses.
C est le milieu de [OB] si et seulement si $a = \sqrt{\mathrm{e}}$.

d. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soient trois points A, B et C deux à deux distincts et non alignés. Soit G le barycentre de $\left\{(\mathrm{A}, \mathrm{e}^a)\ ;\ (\mathrm{B},)\ ;\ (\mathrm{C}\,;\,2)\right\}$.
Dans le repère $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ le point G a les coordonnées $(x,\ y)$ telles que $x = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^a+1)^2}$ et $y = \dfrac{2\mathrm{e}^a}{(\mathrm{e}^a+1)^2}$.

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{4}{x+2}.$$

On considère la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$$

On admettra que la suite u est bien définie.

a. f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b. u est croissante.

c. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.

d. u est convergente.

EXERCICE 12
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{4}{x+2}.$$

On considère la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \quad \text{et} \quad v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 2}. \end{array}\right.$$

On admettra que les suites u et v sont bien définies.

a. v est géométrique de raison 4.

b. $\displaystyle\sum_{k=5}^{15} v_k = v_5 \times \frac{4^{10} - 1}{3}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{v_n - 1}$.

d. La suite u converge vers -1.

EXERCICE 13
Soient b et n deux entiers naturels tels que $b > 2$ et $n \geqslant 2$.
Une urne contient 2 boules blanches et $(b-2)$ boules noires, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne, on repère sa couleur et on la remet dans l'urne. On répète ainsi n fois cette expérience.
On désigne par p_n la probabilité de tirer une boule blanche et une seule lors des $(n-1)$ premiers tirages et une boule noire au n-ième tirage.

a. $p_2 = 1 - \dfrac{2}{b^2}$.

b. $p_n = \dfrac{2(n-1)}{b}\left(1 - \dfrac{2}{b}\right)^{n-1}$.

c. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln\left(p_n\right) 0 = +\infty$.

d. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{p_n}{1} n - 1 = 1$.

EXERCICE 14
Un jeu consiste à lancer trois fois de suite et de façon indépendante un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On obtient ainsi une partie complète en trois manches, chaque lancer constituant une manche.
Le joueur gagne la partie s'il obtient « 1 » ou « 2 » à chaque lancer. Il perd dans les autres cas.
La partie coûte 1 euro ; le joueur reçoit 27 euros s'il gagne la partie.

a. La probabilité de gagner une partie est $\dfrac{1}{27}$.

b. Ce jeu est équitable.

c. La probabilité pour un joueur de gagner au moins une fois en trois parties est $\dfrac{1}{9}$

d. La probabilité qu'un joueur gagne une partie sachant qu'il a gagné la première manche est la même que la probabilité qu-il gagne la première manche sachant qu'il a gagné la partie.

EXERCICE 15
L'espace est muni d'un repère orthonormal. On considère le système

$$[\text{S}] : \left\{\begin{array}{lcr} x + 2y - 3z & = & 1 \\ -3x + y + 2z & = & -3 \\ 2x - 3y + z & = & 2 \end{array}\right.$$

On appelle P le plan d'équation cartésienne $x+2y-3z=1$ et D la droite définie par le système d'équations : $\begin{cases} -3x+y+2z &= -3 \\ 2x-3y+z &= 2 \end{cases}$

a. Le système [S] admet pour unique solution en $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ le triplet $(2\,;1\,;1)$.

b. La droite D est contenue dans le plan P.

c. Le système $\begin{cases} x-y &= 1 \\ y-z &= 0 \end{cases}$ est un autre système qui permet de définir la droite D.

d. Le vecteur $\overrightarrow{u}\,(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$est un vecteur directeur de la droite D.

Exercice 16

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère par leurs coordonnées les points $\text{A}\left(1\ ;\ -1+\sqrt{2}\ ;\ 2\right)$, $\text{B}\left(3\ ;\ -1-\sqrt{2}\ ;\ 4\right)$ et $\text{C}(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$.
On appelle Σ l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que : $(x-1)(x-3)+(y+1-\sqrt{2})(y+1+\sqrt{2})+(z-2)(z-4)=0$.
$\mathscr{P}$ est le plan d'équation cartésienne : $x-y+z\sqrt{2}=3\sqrt{2}-1$.

a. Σ est une sphère dont un diamètre est [AB].

b. Σ est une sphère de centre C.

c. La distance de C à $\mathscr{P}$ est $\dfrac{3\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$.

d. $\mathscr{P}$ est tangent à Σ.