Concours Fesic mai 2006

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification.
+1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Soit la fonction f qui, à tout point M d'affixe z, z différent de 1, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{2z+1}{z-1}.$$

1. f possède deux points invariants conjugués.
2. L'ensemble des points M d'affixes z tels que $z' \in \mathbb{R}$ est l'axe des abscisses.
3. L'ensemble des points M d'affixes z tels que $z' = 2$ est un cercle.
4. À tout point M' du plan d'affixe z', on peut associer un point M d'affixe z tel que $f(M) = M'$ sauf au point M' d'affixe $z' = 2$.

EXERCICE 2
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère les complexes z_1 de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$, $z_2 = \overline{z_1}$ et $z_3 = 1 + \mathrm{i}$.

1. $\left|\dfrac{z_3^8 \times z_1^9}{z_2^{11}}\right| = 4.$
2. $\dfrac{z_1^4 \times z_2^7}{z_3^6}$ est un nombre réel.
3. $(z_1 - z_3)^4 = 28 - 16\sqrt{3}.$
4. L'ensemble des points M d'affixe z telles que $\arg(z) = \arg(z_3)$ est la droite d'équation $y = x$.

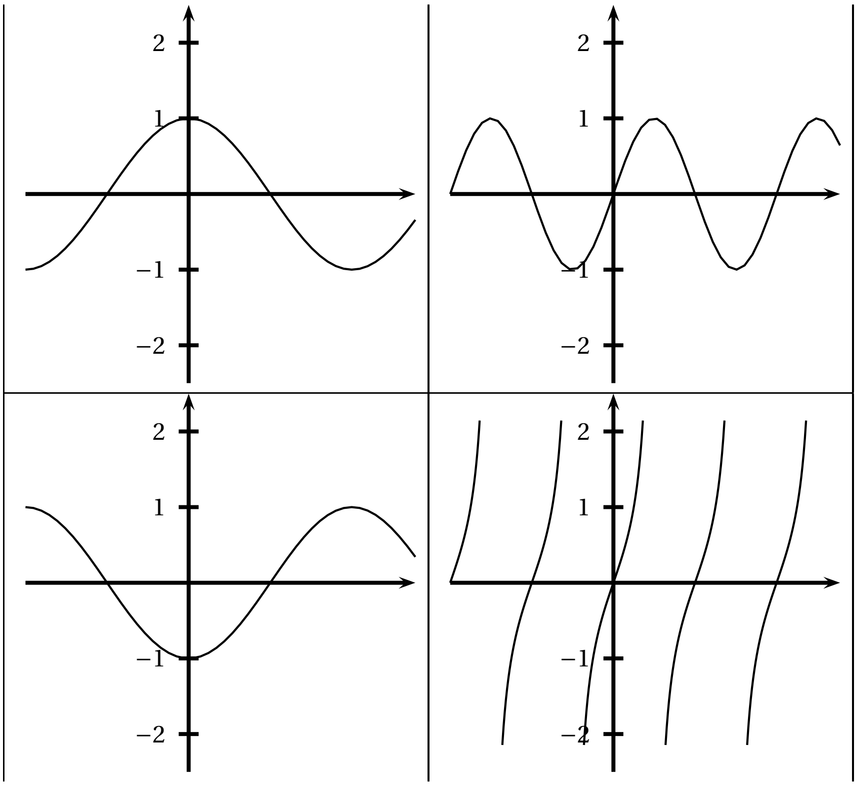
EXERCICE 3
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère le point A d'affixe $a = 5 - \mathrm{i}\sqrt{3}$. On appelle :

- B le point d'affixe b, image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- C le point d'affixe c, milieu de [OA],
- D le point d'affixe d donnée par $d - c = \frac{1}{2}(b - a)$,
- E le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

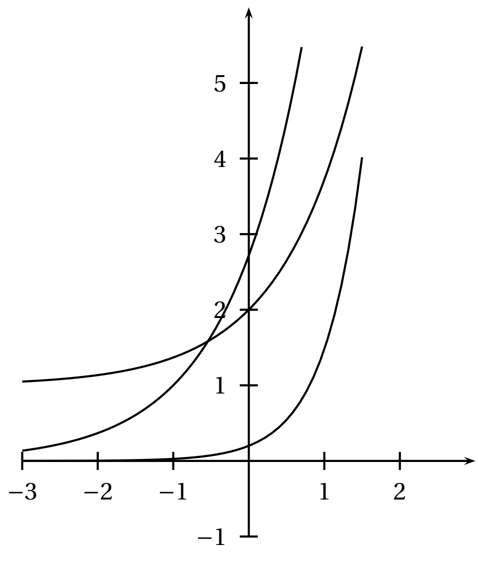
1. Le point B a pour affixe $b = 3\sqrt{3} + \mathrm{i}$.
2. D est le milieu de [OB].
3. E est le barycentre de $\{(\mathrm{B},\ 1)\ ;\ (\mathrm{C},\ 2)\}$.
4. La droite (OE) est perpendiculaire à (AB).

EXERCICE 4

1. La courbe représentant la fonction $x \longmapsto \sin(x)$ est la courbe $\mathscr{C}_2$.



2. On considère les trois courbes ci-dessous : la courbe représentant la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x+1}$ est $\mathscr{C}_1$.

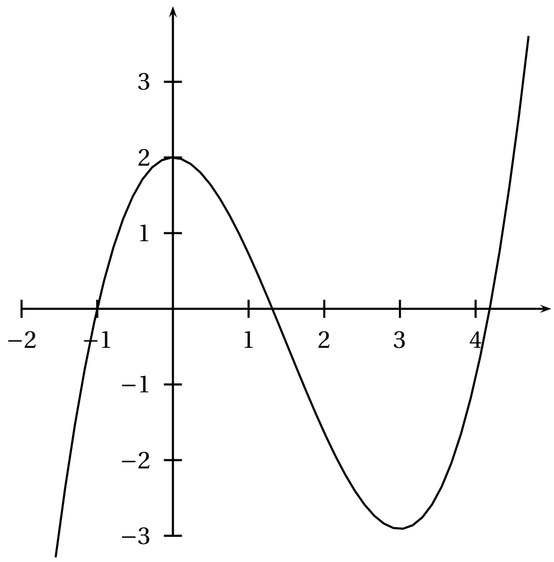


3. On considère la fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous et la fonction F définie sur $[0\,;\,4]$ par

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

F est croissante sur $[0\,;4]$.

4. On considère les mêmes fonctions f et F qu'au **c**.
La fonction F est deux fois dérivable sur $[0\,;4]$ et vérifie $F''(0) = 0$.



EXERCICE 5

1. Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 5$.
Alors $g(x)$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$ et cette limite est comprise entre 3 et 5.
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère du plan. $(\mathscr{C})$ possède une asymptote d'équation $x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x>0}} f(x) = 0$.
3. La fonction F définie par $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x}{2}$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = x\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Soient f la fonction définie par $f(x) = 2\ln x$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
$(\mathscr{C})$ possède au point d'abscisse -1 une tangente d'équation $y = -2x - 2$.

EXERCICE 6

1. Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\int_1^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. On veut prouver que la suite u est convergente. On considère pour cela le raisonnement suivant :
« Je choisis $m = 0$ et $M = 1$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [1\,;\,n]$, on a $t^2 \geqslant t$, donc $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.. Il s'ensuit que $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_1^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, soit $0 \leqslant u_n \leqslant \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_1^n$, soit enfin $0 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-n} \leqslant 1$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite apparaît bornée par $m = 0$ et $M = 1$.
Soit de plus $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et positive sur $[1\,;\,n]$. u_n représente donc l'aire de la portion de plan comprise entre les droites d'équations $x = 1$, $x = n$, $y = 0$ et la courbe représentant cette fonction. Cette aire

augmente quand n augmente, ce qui se traduit par le fait que la suite u est croissante.
Conclusion : u est croissante et majorée par 1 donc la suite u est convergente. ».
Ce raisonnement est exact.

2. Soit f la fonction définie sur $[0 ; \ln 2]$ par : $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^x$. On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère du plan. On cherche à calculer l'aire de la portion de plan limitée par les droites d'équation $x = 0$, $x = \ln 2$, $y = 0$ et la courbe $(\mathscr{C})$.
On considère pour cela le raisonnement suivant (et le renseignement $\ln 2 \approx 0,7$) :
« La fonction F définie par $F(x) = (2x-3)\mathrm{e}^x$ est une primitive de f sur $[0 ; \ln 2]$. F est en effet dérivable sur $[0 ; \ln 2]$ et $F'(x) = 2\mathrm{e}^x + (2x-3)\mathrm{e}^x = (2x-1)\mathrm{e}^x$.
On a : $\displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[(2x-3)\mathrm{e}^x\right]_0^{\ln 2} = (2\ln 2 - 3) \times 2 - (-3) = 4\ln 2 - 3 \approx -0,2$.
Comme le résultat est négatif, c'est que l'aire cherchée est la valeur absolue de ce résultat, soit 0,2 unité d'aire ».
Ce raisonnement est exact.

3. Soit f la fonction définie sur par $f(x) = (1+x)^{10}$. On cherche une approximation de $f(0,001)$. On considère pour cela le raisonnement suivant :
« f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour x réel, $f'(x) = 10(1+x)^9$ et la courbe représentant f possède une tangente au point d'abscisse 0 d'équation $y = xf'(0) + f(0)$, soit $y = 10x+1$. On en déduit que $f(0,001) \approx 10 \times 0,001 + 1$, soit $f(0,001) \approx 1,01$. »
Ce raisonnement est exact.

4. Soit D l'ensemble des valeurs réelles x telles que $\sin x \neq 0$. Soit f la fonction définie sur D par : $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. On veut prouver que f est décroissante sur D.
On considère pour cela le raisonnement suivant :
« f est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont dérivables sur D et dont le dénominateur ne s'annule pas sur D. On en déduit que f est dérivable sur D.
Pour $x \in$D , on a $f'(x) = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$. Pour tout $x \in$ D, on a $f'(x) < 0$.
Comme le signe de la dérivée donne le sens de variation de la fonction, c'est que f est strictement décroissante sur D. »
Ce raisonnement est exact.

EXERCICE 7

Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}\sin x$.
Soit f la fonction définie par $f(x) = -\dfrac{1}{2}(\cos x - \sin x)$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sin x \cos x$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n\pi}\left(\mathrm{e}^{-\pi}+1\right)$.

3. f est l'unique solution de l'équation (E) qui s'annule en 0.

4. Si g est une solution de (E), la courbe représentant g possède une tangente au point d'abscisse 0 dont une équation est donnée par $y = (1-2x)g(0)$.

EXERCICE 8

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x+2}{5x}\right)$. On appelle D_f l'ensemble de définition de f.

1. $D_f = \mathbb{R}_+^*$.
2. Soit g une fonction définie et dérivable sur $D_g = \mathbb{R} - \left\{0 ; \dfrac{-2}{3}\right\}$ telle que quel que soit $x \in D_g$, $g'(x) = \dfrac{3}{3x+2} - \dfrac{1}{x}$. f et g sont égales à une constante additive près.
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = -\dfrac{2}{5}$.
4. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x f(x) = 0$.

EXERCICE 9

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et les fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \mathrm{e}^{3x}$, $f_2(x) = -\lambda^2\mathrm{e}^x + 2\lambda\mathrm{e}^{2x}$. On appelle $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ leurs courbes représentatives dans un repère du plan.

1. $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupent au point A$(\ln\lambda ; 3\lambda)$.
2. Quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de $\mathscr{C}_2$.
3. Il existe un point B en lequel $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ possèdent la même tangente.
4. Lorsque λ est supérieur à 1, l'aire de la portion du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et limitée par les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln\lambda$ est, en unités d'aire, $\dfrac{(\lambda-1)^3}{3}$.

EXERCICE 10

On considère une suite v strictement croissante dont tous les termes appartiennent à l'intervalle $[0 ; \pi]$.
On définit les suites c et s pour $n \in \mathbb{N}$ par $c_n = \cos(v_n)$ et $s_n = \sin(v_n)$.

1. La suite v converge vers π.
2. La suite c est croissante.
3. La suite s est périodique.
4. Les suites c et s sont adjacentes si et seulement si la suite v converge vers $\dfrac{\pi}{4}$.

EXERCICE 11

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère la suite (z_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{3}}$ et on appelle A_n le point d'affixe z_n.

1. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, A_n appartient au cercle de centre O et de rayon 1.
2. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1} - z_n| = |z_1 - 1|$.
3. La suite (z_n) est périodique de période 5.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} = z_0 + z_1 + \cdots + z_4 = 0$.

EXERCICE 12

On considère la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)u_n$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{n}{(n-1)!}$.
2. La suite u est croissante.

3. Quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$, si on a $n \geqslant 2$, alors on aura : $0 \leqslant u_n \leqslant 2 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}$.

4. La suite u est convergente et de limite nulle.

EXERCICE 13

On considère un espace probabilisé fini $(\Omega,\ p)$ dans lequel un évènement A a les trois possibilités A_1, A_2, et A_3 deux à deux distinctes de se produire et un évènement B a les deux possibilités B_1 et B_2 distinctes de se produire. Le tableau suivant donne en pourcentages la probabilité de certains évènements de se produire par rapport à l'univers Ω.

	A_1	A_2	A_3	Total / A
B_1		20		
B_2	30			
Total / B			10	100

On donne aussi les renseignements suivants : $p(A_2) = 60\,\%$ et $p_{B_1}(A_3) = \dfrac{1}{6}$.

1. A_1 et B_1 sont incompatibles.

2. La probabilité d'obtenir B_1 est 24 %.

3. Si A_3 est réalisé, la probabilité d'obtenir A_3 et B_1 est 4 %.

4. La probabilité d'obtenir A_3 et B_1 est 4 %.

EXERCICE 14

Une rampe lumineuse est constituée d'ampoules bleues, rouges ou jaunes provenant de deux usines U_1 et U_2. U_1 produit 60 % de ces ampoules. La durée de vie en années de chacune de ces ampoules suit une loi exponentielle dont les paramètres sont les suivants :

	Ampoules bleues	Ampoules rouges	Ampoules jaunes
Ampoules de U_1	$\lambda_{B_1} = 0,25$	$\lambda_{R_1} = 0,20$	$\lambda_{J_1} = 0,15$
Ampoules de U_2	$\lambda_{B_2} = 0,20$	$\lambda_{R_2} = 0,15$	$\lambda_{J_2} = 0,10$

1. La probabilité qu'une ampoule rouge dure moins de 5 ans sachant qu'elle vient de U_1 est $0,6\left(1 - e^{-1}\right)$.

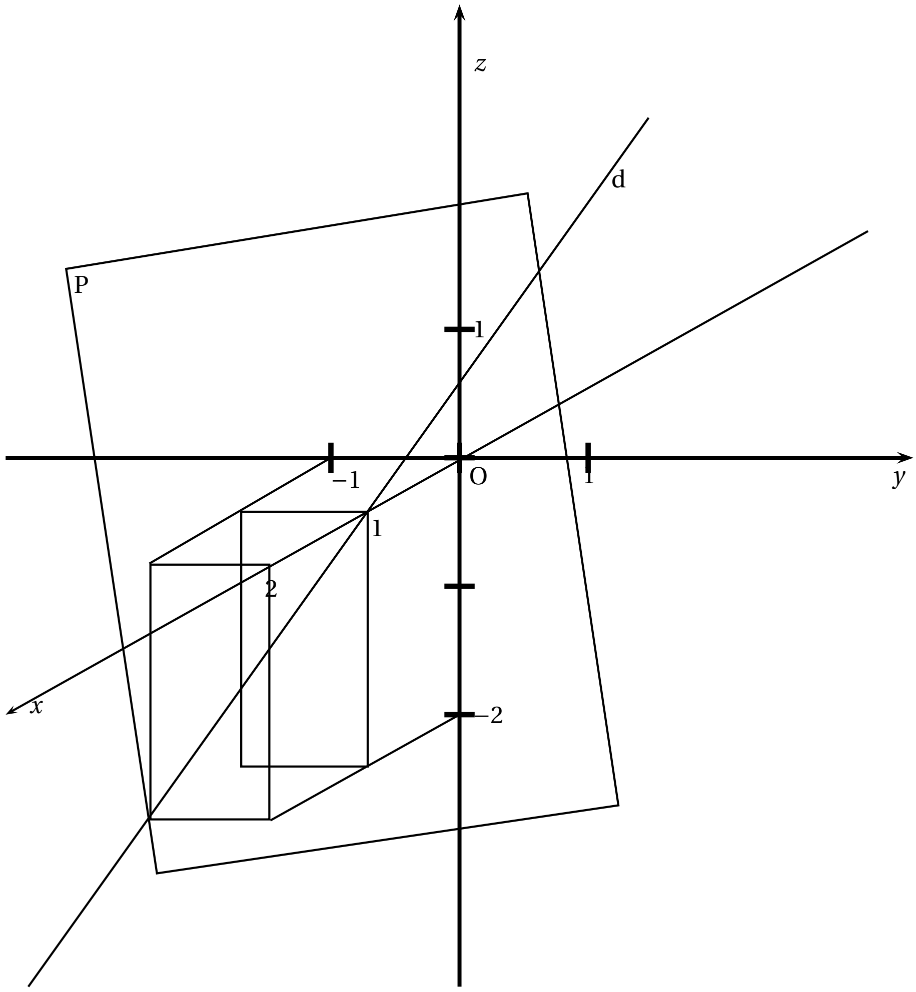
2. La probabilité qu'une ampoule rouge dure moins de 5 ans est $1 - 0,6e^{-1,25} - 0,4e^{-1}$.

3. La probabilité qu'une ampoule jaune dure entre 5 et 10 ans est $0,6\left(e^{-0,75} - e^{-1,5}\right) + 0,4\left(e^{-0,5} - e^{-1}\right)$.

4. La demi-vie en années d'une ampoule jaune de U_2 est $4\ln 2$.

EXERCICE 15

Le schéma ci-dessous représente une situation de l'espace dans un repère approprié dont le centre est un point O. On sait que la droite d est orthogonale au plan P. On appelle A le point de coordonnées $(2\ ;\ -1\ \ ;\ -2)$. P



1. Le plan P a pour équation cartésienne $x - y - 2z - 1 = 0$.
2. La droite d a pour équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2t \\ y &=& 1+2t \\ z &=& 2+4t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$
3. La demi-droite [OA) a pour équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+2t \\ y &=& -1-t \\ z &=& -2-2t \end{array}\right.$
4. La sphère de centre O et de rayon $\dfrac{1}{2}$ est cachée par P.

EXERCICE 16

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on désigne par P et Q les plans d'équations respectives P : $\left\{\begin{array}{lcl} y - x &=& \sin^2\theta \\ z &\in& \mathbb{R} \end{array}\right.$,

Q : $\left\{\begin{array}{lcl} z - y &=& \cos^2\theta \\ x &\in& \mathbb{R} \end{array}\right.$.

On appelle Δ la droite d'intersection de ces deux plans.

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les plans P et Q sont orthogonaux.
2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la droite Δ est contenue dans le plan d'équation $\left\{\begin{array}{lcl} z - x &=& 1 \\ y &\in& \mathbb{R} \end{array}\right.$
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la droite Δ est orthogonale au plan d'équation $x + y + z = 0$.
4. Il existe un réel θ tel que Δ soit parallèle au plan $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.