Concours d'entrée FESIC 2004

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d :

$$a = -2-2\text{i} \qquad ; \qquad b = 2 \qquad ; \qquad c = 2+4\text{i} \qquad ; \qquad d = -2+2\text{i}.$$

a. ABCD est un parallélogramme.

b. Le point E, image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, est un point de l'axe des abscisses.

c. Soient $f = 6\text{i}-4$ et F le point d'affixe f.
Le triangle CDF est rectangle et isocèle en D.

d. Soient $g = -2\text{i}$ et G le point d'affixe g.
Le triangle CDG est rectangle et isocèle en D.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

a. La partie réelle de $(1+2\text{i})^5$ est 41.

b. On considère trois points quelconques A, B et C du plan d'affixes respectives a, b et c.

L'écriture $(b-c) = \text{i}(a-c)$ caractérise une homothétie de centre C et de rapport i.

c. $(1+\text{i})^{20}$ est réel.

d. L'équation $z^4 - 1 = 0$ possède quatre solutions distinctes dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE 3

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soient A le point d'affixe $a = 1-\text{i}$ et B le point d'affixe $b = 2\text{i}-3$.
À tout point M d'affixe z, $z \neq b$, on associe le point M' d'affixe

$$Z = \frac{z-1+\text{i}}{z+3-2\text{i}}.$$

a. L'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit réel est le segment [AB].

b. Pour tout z différent de $-3+2\text{i}$ et de $-3-2\text{i}$, on obtient la forme algébrique de Z par le calcul : $\dfrac{(z-1+\text{i})(z+3+2\text{i}}{(z+3-2\text{i})(z+3+2\text{i}})$.

c. L'ensemble des points M d'affixe z tels que M' soit un point de l'axe des ordonnées est le cercle d'équation $(x+1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$, sauf le point B.

d. Soit z_0 une solution de l'équation $\dfrac{z-1+\text{i}}{z+3-2\text{i}} = \text{i}$ (on admet l'existence d'une telle solution).

Le point M_0 d'affixe z_0 est un point de la médiatrice de [AB].

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x, \text{ si } \quad x < 0 \\ \cos x, \text{ si } \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère du plan. Soit Γ la représentation graphique de la fonction exponentielle ($x \longmapsto e^x$) dans le même repère.

a. Dans la portion du plan correspondant aux points d'abscisses négatives, $\mathcal{C}_f$ est l'image de Γ par la symétrie axiale dont l'axe de symétrie est l'axe des abscisses.

b. f est continue en 0.

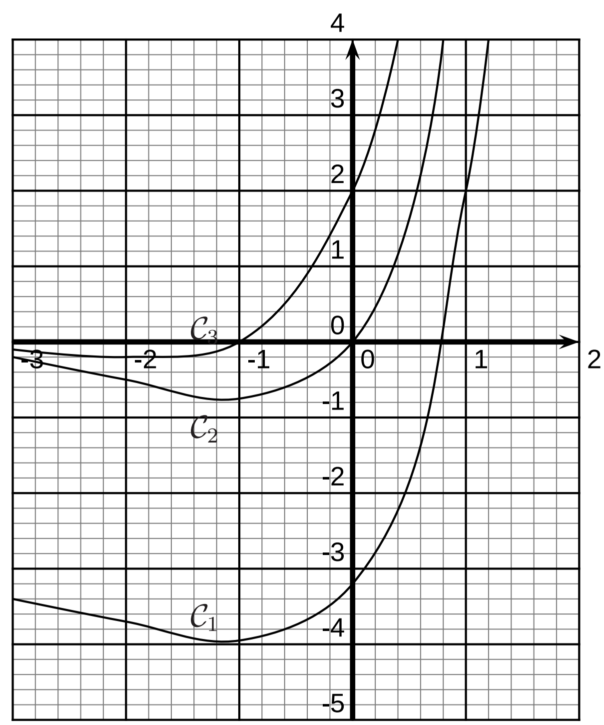
c. f est dérivable en 0.

d. L'équation $f(x) = 0$ possède une et une seule solution dans l'intervalle $]-\infty \,;\, \pi]$.

EXERCICE 5

On donne ci-dessous la représentation graphique de trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$. L'une d'elles est la représentation d'une fonction, les deux autres sont les représentations de deux de ses primitives. On note :

- f_1 la fonction représentée par $\mathcal{C}_1$;
- f_2 la fonction représentée par $\mathcal{C}_2$;
- f_3 la fonction représentée par $\mathcal{C}_3$;



a. f_1 est une primitive de f_2.

b. f_3 est la dérivée de f_1.

c. On considère la surface plane limitée par la courbe $\mathcal{C}_3$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -1$. L'aire, en unités d'aire, de cette surface est $f_2(-1)$.

d. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient M_1 le point de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse x et M_2 le point de $\mathcal{C}_2$ de même abscisse.

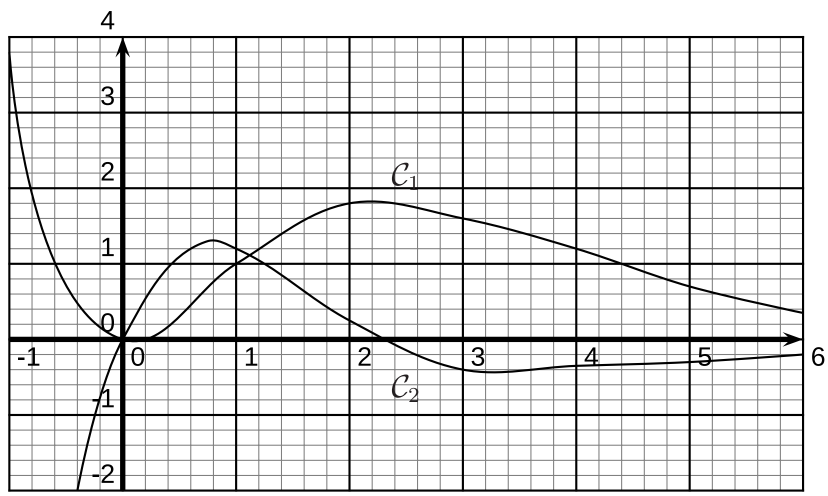
La distance M_1M_2 est constante.

EXERCICE 6

On donne ci-dessous la représentation graphique de deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

- $\mathcal{C}_1$ représente une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{C}_2$ représente la fonction f', dérivée de f.

On appelle f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la dérivée de f'.



a. Toute primitive de f est croissante sur [-1 ; 6].

b. La courbe représentant la fonction f'' passe par le point de coordonnées (0 ; 0).

c. La fonction f'' s'annule trois fois sur $[-1\ ;\ 6]$.

d. On considère la surface plane limitée par la courbe $\mathcal{C}_2$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

L'aire de cette surface est égale à celle d'un carré unité.

EXERCICE 7

a. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+*$ par :

$$f(x) = x[sin(\ln x) - cos(\ln x)].$$

La dérivée f' de f est la fonction définie sur $\mathbb{R}*$ par : $f'(x) = 2\sin(\ln x)$.

b. $7\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + 2\ln\left(3+\sqrt{2}\right) - \ln\left(11+6\sqrt{2}\right) + 7\ln\left(\sqrt{2}-1\right) = 0$.

c. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2$.

d. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 4 - 2\sqrt{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 8

Soient f et g les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. L'image de $\mathbb{R}$ par f est $]0~;~1]$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant g(x) \leqslant x^2 - x$.

c. Dans un repère du plan et pour $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x_0)$ représente l'aire de la surface plane limitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = x_0$ et $x = x_0^2$.

d. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f\left(x^2\right) - f(x)$.

EXERCICE 9

Soient $l \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes tous strictement positifs. Pour les items **a., b.** et **c.**, on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

a. l est strictement positif.

b. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que l soit une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près.

c. La suite $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge vers $\ln l$.

d. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour $n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_{n+1} = \ln u_n$ et que $u_0 > u_1$.

On ne suppose pas que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

EXERCICE 10

On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $z_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle M_n le point d'affixe z_n dans le plan complexe d'origine O.

a. La suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, les triangles $\mathrm{O}M_nM_{n+1}$ sont rectangles.

c. M_n appartient à l'axe des abscisses si et seulement si n est un multiple de 4.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$.

EXERCICE 11

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

On considère, dans ce repère, les points A$(1~;~-1)$, B$(5~;3)$ et I milieu de [AB].

Soit $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de points définie par :

- $\mathrm{G}_0 = \mathrm{O}$;
- Pour $n \in \mathbb{N}, \quad G_{n+1}$ est le barycentre du système $\{(G_n~;~2)~;~(\mathrm{A}~;~1)~;~(\mathrm{B}~;~1)\}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle $(x_n~;~y_n)$ les coordonnées de G_n.

a. G_1, G_2 et G_3 sont alignés.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}, \quad G_{n+1}$ est l'image de G_n par l'homothétie de centre I et de rapport 2.

c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = x_n - 3$, est une suite géométrique de premier terme -3 et de raison $\dfrac{1}{2}$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad x_n = 3\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

EXERCICE 12

On considère une droite graduée Δ d'origine O.
On considère la suite de points $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ainsi :
• G_0 a pour abscisse 0 et,
• pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad G_{n+1}$ est le barycentre du système $\{(G_n\ ;\ 2)\ ;\ (H_n\ ;\ 3)\}$;
et la suite de points $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ainsi :
• H_0 a pour abscisse 1 et,
• pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad H_{n+1}$ est le barycentre du système $\{(G_n\ ;\ 3)\ ;\ (H_n\ ;\ 2)\}$.
On appelle respectivement $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites obtenues en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad g_n$ l'abscisse de G_n et h_n l'abscisse de H_n.

a. La suite $(g_n - h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{-1}{5}$.
b. La suite $(g_n + h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
c. Les deux suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
d. Les suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

EXERCICE 13

Une urne contient 3 boules : une bleue, une verte et une rouge.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On effectue n tirages successifs d'une boule, avec remise intermédiaire.
On suppose les tirages équiprobables et indépendants et on appelle p la probabilité associée â cette expérience.
On définit de plus les évènements suivants :
• On appelle A_n, l'évènement : « Les $n-1$ premiers tirages ont donné la même boule et la n-ième boule tirée est différente des précédentes » ;
• Lorsque k est un entier compris entre 1 et n, on appelle B_k, V_k et R_k les évènements respectivement associes au tirage d'une boule bleue, verte ou rouge lors du k-ième tirage.

a. $p\left(B_1 \cap \overline{B_2}\right) = 1 - p\left(V_1 \cap \overline{V_2}\right) - p\left(R_1 \cap \overline{R_2}\right)$.

b. $p\left(A_2\right) = \dfrac{2}{3}$.

c. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $p\left(A_n\right) = \dfrac{2}{3^{n-1}}$.

d. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[p\left(A_2\right) + p\left(A_3\right) + ... + p\left(A_n\right)\right] = \frac{1}{3}$.

EXERCICE 14

La durée de vie d'un moteur est de 5 ans et suit une loi exponentielle de paramètre λ.
On utilisera, pour les calculs, l'approximation $\ln 2 \approx 0{,}7$.

a. La densité de probabilité associée à cette loi est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $f(t) = 0$ si $t \notin [0\ ;\ 5]$ et
- $f(t) = 5\mathrm{e}^{-5t}$ si $t \in [0\ ;\ 5]$.

b. On suppose que 50 % des clients ont été dépannés durant la garantie. La durée de cette garantie est de 3 ans et demi environ.

c. On considère un lot de 10 moteurs fonctionnant de manières indépendantes et on appelle X le nombre de moteurs qui n'ont pas de panne pendant les deux premières années.

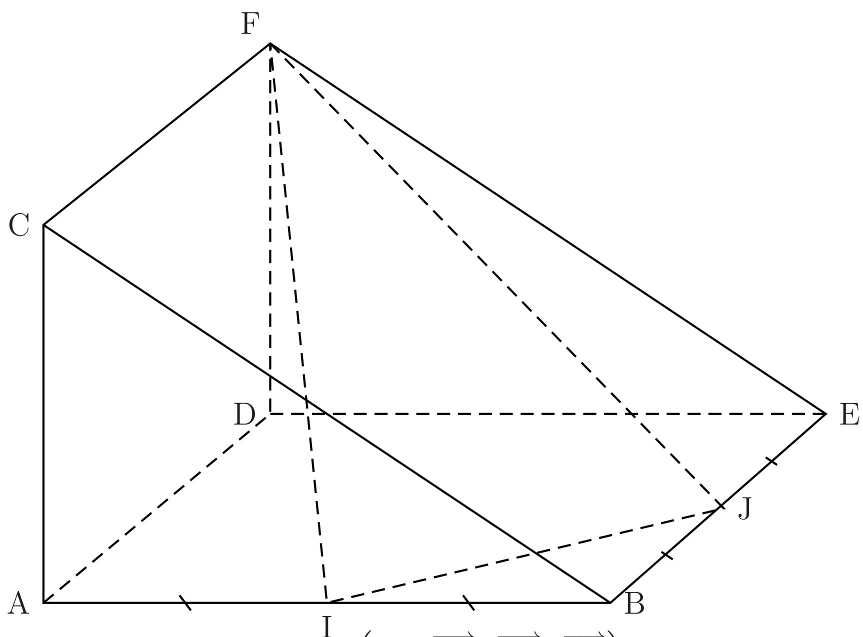
La probabilité d'avoir $X \geqslant 1$ est $p(X \geqslant 1) = \mathrm{e}^{-4}$.

d. On considère à nouveau un lot de 10 moteurs fonctionnant de manières indépendantes et on appelle X de la même façon qu'au **c.**, le nombre de moteurs qui n'ont pas de panne pendant les deux premières années.

L'espérance de la variable aléatoire X est $\mathrm{E}(X) = 10\mathrm{e}^{\frac{-2}{5}}$.

EXERCICE 15

On considère le prisme ABCDEF ci-dessous.
Sur ce prisme, I est le milieu de [AB], J est le milieu de [BE], et ABED et ADFC sont des carrés.



On rapporte l'espace au repère $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle G_n le barycentre du système $\{(\mathrm{A}\ ;\ 1)\ ;\ (\mathrm{B}\ ;\ 1)\ ;\ (\mathrm{E}\ ;\ 1)\ ;\ (\mathrm{D}\ ;\ n)\}$.
(On notera que G_n existe quel que soit $n \in \mathbb{N}$, puisque $1+1+1+n \neq 0$.)

a. Le plan (IJF) est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que : $2x - +3z - 1 = 0$.

b. La droite Δ passant par D et orthogonale au plan (IJF) est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que :

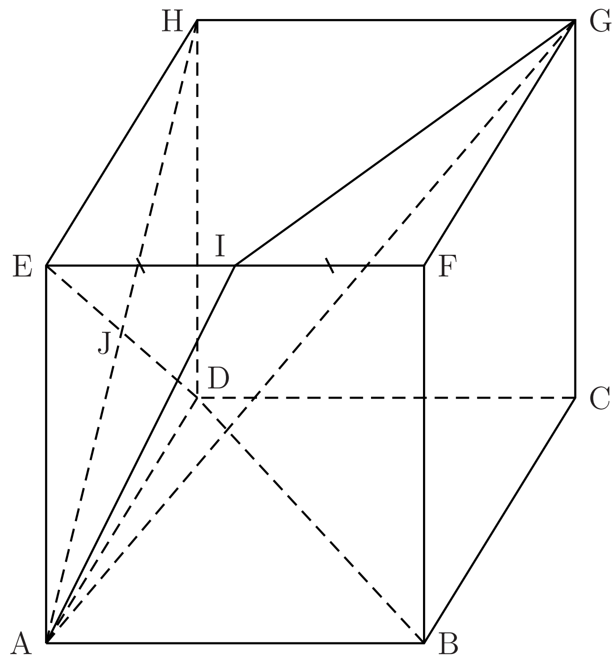
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+k \\ y & = & 1-k \\ z & = & \dfrac{3}{2}k \end{array}\right., \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

c. G_3 appartient au segment [BD].

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ME} + n\overrightarrow{MD}\right\| = n + 3$ est la droite (BD).

EXERCICE 16

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous, où I est le milieu de [EF] et J est le centre de la face ADHE.



On rapporte l'espace au repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

a. L'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $y = -x + 1$ est le plan (DBH).

b. Le plan (AIG) est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que : $2x - y - z = 0$.

c. La droite (BJ) est orthogonale au plan (AIG).

d. La distance, en unités de repère, de B au plan (AIG) est 2.