Exercice IV

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 7$ et pour tout entier naturel par : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 6}{5}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 2$.
   - **a.** Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   - **b.** Exprimer v_n en fonction de n, en déduire que $u_n = 5\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + 2$.
   - **c.** Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{2x+6}{5}$.
   - **a.** Tracer la représentation graphique D de f dans le repère ci-dessous.
   - **b.** Placer, sur l'axe des abscisses, le point P_0 d'abscisse u_0. En utilisant la droite D et la droite Δ d'équation $y = x$, construire les points P_1, P_2 et P_3 de l'axe des abscisses et d'abscisses respectives u_1, u_2 et u_3.
   - **c.** À quoi correspond le point d'intersection de D et Δ ?