Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0\,;\,1]$:

$$\frac{1}{n}-\frac{x}{n^2}\leqslant\frac{1}{x+n}\leqslant\frac{1}{n}.$$

2. **a.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,\mathrm{d}x$.

   b. Déduire en utilisant **1.**, que :

$$\text{pour } n\in\mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \quad (1)$$

$$\text{puis que} \quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}.$$

3. On appelle U la suite définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par :

$$U(n)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n).$$

   Démontrer que U est décroissante (on pourra utiliser **2. b.**.)

4. On désigne par V la suite de terme général :

$$V(n)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1).$$

   Démontrer que V est croissante.

5. Démontrer que U et V convergent vers une limite commune notée γ.
   Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par la méthode de votre choix.