

EXERCICE 5**5 points****Commun à tous les candidats**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe \mathcal{C} représentative de f est donnée sur le document annexe 2 que l'on complétera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe \mathcal{C}

1. On note f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.
2. Pour tout x de l'intervalle $] -1 ; +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$. Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $] -1 ; +\infty[$. Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f .
3. Soit \mathcal{D} la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} .

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1. Démontrer que si $x \in [0 ; 4]$, alors $f(x) \in [0 ; 4]$.
2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \text{ et} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

- a. Sur le graphique de l'annexe 2, en utilisant la courbe \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} , placer les points de \mathcal{C} d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3 .
- b. Démontrer que pour tout n de \mathbb{N} on a : $u_n \in [0 ; 4]$.
- c. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
- d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.
- e. Utiliser la partie A pour donner la valeur de ℓ .

ANNEXE

À compléter et à rendre avec la copie

Exercice 5

