**EXERCICE 1 - LA RÉUNION JUIN 2004** **6 points**

On désigne par $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par $f'$ sa fonction dérivée.
Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :
(1) pour tout nombre réel $x$, $\left[f'(x)\right]^2 - \left[f(x)\right]^2 = 1$,
(2) $f'(0) = 1$,
(3) la fonction $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel $x$, $f'(x) \neq 0$.

   **b.** Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :
   (4) pour tout nombre réel $x$, $f''(x) = f(x)$, où $f''$ désigne la fonction dérivée seconde de la fonction $f$.

3. On pose : $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

   **a.** Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

   **b.** Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.

   **c.** En déduire les fonctions $u$ et $v$.

   **d.** En déduire que, pour tout réel $x$, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

4. **a.** Étudier les limites de la fonction $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

   **b.** Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

5. **a.** Soit $m$ un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.

   **b.** Déterminer cette solution lorsque $m = 3$ (on en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale à $10^{-2}$ près).

**EXERCICE 3 - LA RÉUNION JUIN 2005** **4 points**

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(C) \quad \left\{\begin{array}{lcl} f(-x)f'(x) & = & 1 \text{ pour tout nombre réel } x, \\ f(0) & = & -4 \end{array}\right.$$

(où $f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $f$) et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction $f$ satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.

   **a.** Démontrer que la fonction $f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

   **b.** Calculer la fonction dérivée de la fonction $g$.

   **c.** En déduire que la fonction $g$ est constante et déterminer sa valeur.

   **d.** On considère l'équation différentielle (E) $y' = \dfrac{1}{16}y$. Montrer que la fonction $f$ est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.

2. **Question de cours**

   **a.** On sait que la fonction $x \longmapsto e^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \longmapsto Ke^{\frac{x}{16}}$, où $K$ est un nombre réel quelconque

   **b.** Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur $-4$ en 0.

3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.