EXERCICE 1 - LA RÉUNION JUIN 2004 **6 points**

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée.
Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) pour tout nombre réel x, $\left[f'(x)\right]^2 - \left[f(x)\right]^2 = 1$,
(2) $f'(0) = 1$,
(3) la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) \neq 0$.
   b. Calculer $f(0)$.
2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :
   (4) pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.
3. On pose : $u = f' + f$ et $v = f' - f$.
   a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.
   b. Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.
   c. En déduire les fonctions u et v.
   d. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.
4. **a.** Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. **a.** Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   b. Déterminer cette solution lorsque $m = 3$ (on en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale à 10^{-2} près).

EXERCICE 3 - LA RÉUNION JUIN 2005 **4 points**

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(\mathrm{C}) \quad \left\{\begin{array}{lcl} f(-x)f'(x) & = & 1 \text{ pour tout nombre réel } x, \\ f(0) & = & -4 \end{array}\right.$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.
   a. Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   b. Calculer la fonction dérivée de la fonction g.
   c. En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.
   d. On considère l'équation différentielle (E) $y' = \dfrac{1}{16}y$. Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.
2. **Question de cours**
   a. On sait que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \longmapsto K\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque
   b. Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.
3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.