Exercice 6 Liban, juin 2009 (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{3}x$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée dans le graphique ci-dessous.
Ce graphique sera complété.

Partie A

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$. Tracer $\mathscr{D}$.
   c. Étudier la position relative de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{C}$.
   d. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right) - \frac{2}{3}x$.
   e. En déduire la limite de f en $-\infty$.
2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 2}{3\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)}$.
   b. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \displaystyle\int_0^n \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$.
2. On admet que, pour tout réel x, $\ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
   Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leqslant 1$. La suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ?

Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe $\mathscr{C}$.
On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de $\mathscr{T}$ puis construire $\mathscr{T}$ sur le graphique.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soient M et N deux points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite $\mathscr{T}$.