- Intégration par parties.
- Démonstrations par récurrence.
- Formule de WALLIS.

Soit n un entier naturel et soit $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathrm{I}_n = \frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}\text{, on note (1) cette égalité}$$

2. Calculer I_0 et I_1.

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$\mathrm{I}_{2n} = \frac{1\times 3\times 5\times \ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times \ldots \times 2n}\times\frac{\pi}{2}$$

4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à zéro, on a :

$$\mathrm{I}_{2n+1} = \frac{2\times 4\times 6\times \ldots \times 2n}{1\times 3\times 5\times \ldots\times(2n-1)}\times\frac{1}{2n+1}$$

5. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

6. A l'aide de relation (1), montrer que :

$$\frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-1} \le \mathrm{I}_n \le \mathrm{I}_{n-1}$$

7. Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{I}_{2n+1}}{\mathrm{I}_{2n}} = 1$.

8. Etablir la formule de WALLIS :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2\times 4\times 6\times \ldots \times 2n}{1\times 3\times 5\times \ldots\times(2n-1)}\right)^2\times\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$