1 ere S — **SUITES** — feuille 10

Exercice I

Le radium 266 est un corps radioactif dont 0,04% des atomes se désintègrent chaque année.

1. En janvier 2000, un objet contient $u_0 = 10$ moles de radium 266, calculer le nombre de moles u_1 que l'objet contient en janvier 2001.
2. Soit u_n le nombre de moles de radium 266 que contient l'objet en janvier $2000 + n$. Exprimer u_n en fonction de n en justifiant ce résultat.
3. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
4. La période d'un élément radioactif est égale au nombre d'années nécessaire à la désintegration de la moitié des atomes du corps. À l'aide de la calculatrice, déterminer la période du radium 266.

Exercice II

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{n^2 + (-1)^n}{n^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $1 - \dfrac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n^2}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice III

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$, $b_0 = 7$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$

Soit D une droite munie d'un repère $(O\ ;\ \overrightarrow{i})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n.

1. Placez les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2 sur.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   Exprimez u_n en fonction de n. Que peut on dire du signe de u_n ?
3. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n \leqslant b_n$.
   b. En déduire le sens de variation des suites (a_n) et (b_n).
   c. Interprétez géométriquement ces résultats.
4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (v_n) est une suite constante. Justifiez que les segments $[A_nB_n]$ ont tous le même milieu I.
5. Que peut on conjecturer sur la convergence des suites (a_n) et (b_n) ?
   Interprétez géométriquement ce résultat.