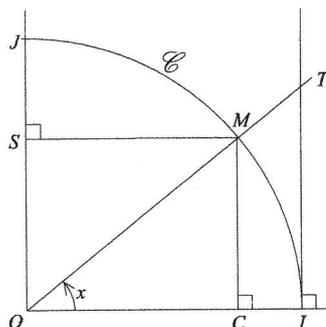


Le but de ce devoir est de démontrer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

PARTIE A *Calculs d'aires*

Soit x un réel de l'intervalle $]0 ; \frac{\pi}{2}[$ et M le point du cercle trigonométrique \mathcal{C} tel que l'angle (\vec{OI}, \vec{OM}) soit de mesure x .

Les éléments géométriques utilisés par la suite sont décrits dans la figure ci-dessous :



1. Exprimer, en fonction de x , les distances OC , OS et IT .
2. Exprimer, en fonction de x , les aires des triangles OIM et OIT .
3. Exprimer, en fonction de x , l'aire du secteur angulaire IOM .
4. Dédire des questions précédentes que $\sin x < x < \tan x$.

PARTIE B

1. Dédire de la relation de la question A. 4. l'encadrement suivant :

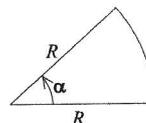
$$\text{pour tout réel } x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[: 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

2. En utilisant le théorème des "gendarmes", en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x}$. Puis, en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}$.
3. Étudier la parité de la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$ par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}$.
4. Conclure.

AIDE 1 *Aire d'un secteur angulaire*

Un secteur angulaire est caractérisé par son angle α et son rayon R :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \alpha R^2$$



AIDE 2 *Théorème des gendarmes*

Soient f , u et v des fonctions admettant des limites en un réel a .

Si pour x assez proche de a , on a : $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} v(x) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.