

**EXERCICE 4****5 points**

On considère une fonction  $f$  dérivable sur l'intervalle  $] -\infty ; +\infty[$ .  
On donne le tableau de ses variations :

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$	
$f'(x)$		+	+	0	-
$f(x)$					

Soit  $g$  la fonction définie sur  $] -\infty ; +\infty[$  par  $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

**Partie A**

- En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe ( $\mathcal{C}$ ) susceptible de représenter  $f$  dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).
- Interpréter graphiquement  $g(2)$ .
  - Montrer que  $0 \leq g(2) \leq 2,5$ .
- Soit  $x$  un réel supérieur à 2.  
Montrer que  $\int_2^x f(t) dt \geq x - 2$ . En déduire que  $g(x) \geq x - 2$ .
  - Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$ .
- Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $] -\infty ; +\infty[$ .

**Partie B**

On admet que pour tout réel  $t$ ,  $f(t) = (t-1)e^{-t} + 1$ .

- À l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction du réel  $x$  l'intégrale  $\int_0^x (t-1)e^{-t} dt$ .
- En déduire que pour tout réel  $x$ ,  $g(x) = x(1 - e^{-x})$ .
- Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $-\infty$ .