PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad y' - 3y = \frac{-3\mathrm{e}}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2}.$$

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-3x}\varphi(x).$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, exprimer $\varphi'(x) - 3\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.
2. Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\varphi(0) = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Partie B : étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{1-3x}}{1+\mathrm{e}^{-3x}}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier les variations de f.
2. Tracer $\mathscr{C}$.
3. Pour α réel non nul, on pose $I_\alpha = \displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$.
   - **a.** Donner le signe et une interprétation graphique de I_α en fonction de α.
   - **b.** Exprimer I_α en fonction de α.
   - **c.** Déterminer la limite de I_α lorsque α tend vers $+\infty$.

Partie C : étude d'une suite

On définit sur $\mathbb{N}^*$ la suite (u_n) par :

$$u_n = \int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x, \text{ où } f \text{ est la fonction définie dans la } \textbf{partie B}.$$

On ne cherchera pas à calculer u_n.

1. **a.** Donner, pour tout n de $\mathbb{N}$, le signe de u_n.

b. Donner le sens de variation de la suite (u_n).

c. La suite (u_n) est-elle convergente ?

2. **a.** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$

$$\mathrm{I}_1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \mathrm{I}_1$$

où I_1 est l'intégrale de la **partie B** obtenue pour α égal à 1.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).
Donner sa valeur exacte.