PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT À UN CERCLE

UNE PROPRIÉTÉ

$\mathscr{C}$ est un cercle de rayon R et de centre O. I est un point quelconque du plan. Une droite Δ passant par I coupe le cercle $\mathscr{C}$ en deux points A et B.

Il s'agit de démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$ est indépendant de la droite Δ.

On considère le point A' de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à A. Démontrer que $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = IO^2 - R^2$

Cet invariant remarquable est appelé la puissance du point I par rapport au cercle $\mathscr{C}$.

APPLICATION

D'un point Ω intérieur à un cercle $\mathscr{C}$ de rayon R, on mène deux droites perpendiculaires qui rencontrent le cercle $\mathscr{C}$ en A et A' d'une part et en B et B' d'autre part. On note I le milieu du segment $[A'B']$.

Il s'agit de montrer que la médiane issue de Ω dans le triangle $\Omega A'B'$ est hauteur du triangle ΩAB.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que les produits scalaires $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega A'}$ et $\overrightarrow{\Omega B} \cdot \overrightarrow{\Omega B'}$ sont égaux.
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Omega I}$ et conclure.