

Exercice 4 (7 points)*Commun à tous les candidats***Partie A.**

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

- 1) Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E).
- 2) Résoudre l'équation différentielle (E₀) : $y' + y = 0$.
- 3) Démontrer qu'une fonction v , définie et dérivable sur \mathbf{R} , est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E₀).
- 4) En déduire toutes les solutions de (E).
- 5) Déterminer la fonction f_2 , solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

Partie B

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur l'ensemble \mathbf{R} par :

$$f_k(x) = (x+k)e^{-x}.$$

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et $+\infty$.
- 2) Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x .
- 3) En déduire le tableau de variation de f_k .

Partie C.

1) On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par $I_0 = \int_{-2}^0 e^{-x} dx$ et pour tout entier naturel

$$n \geq 1 \text{ par : } I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx.$$

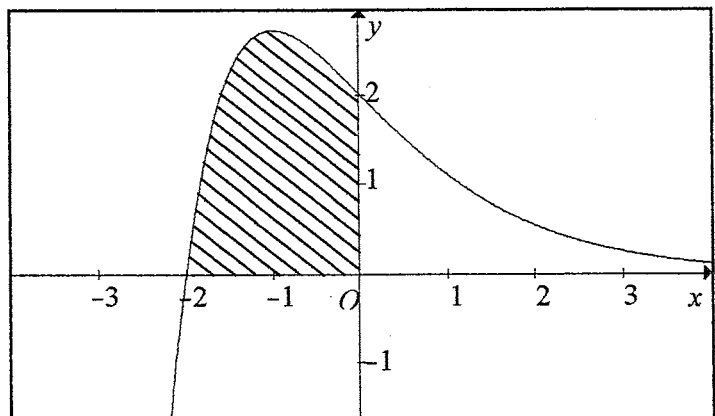
- a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale I_0 .
- b) En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1)I_n.$$

- c) En déduire les valeurs exactes des intégrales I_1 et I_2 .

2) Le graphique ci-dessous représente une courbe C_k qui est la représentation graphique d'une fonction f_k définie à la partie B.

- a) À l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel k correspondant.



- b) Soit S l'aire de la partie hachurée (en unité d'aire) ; exprimer S en fonction de I_1 et I_0 et en déduire sa valeur exacte.