Exercice 1 (*4 points*)
Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z, on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = (\vec{u},\vec{w})$ à 2π près.

Partie A. Restitution organisée de connaissances.

Prérequis : On sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :

$$\arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z').$$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$.

Partie B.
On note A et B les points d'affixes respectives $-\mathrm{i}$ et $3\mathrm{i}$.
On note f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{\mathrm{i}z+3}{z+\mathrm{i}}$.

1) Etude de quelques cas particuliers.
   a) Démontrer que f admet deux points invariants J et K appartenant au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$. Placer ces points sur le dessin.
   b) On note C le point d'affixe $c = -2+\mathrm{i}$, démontrer que le point C', image de C par f, appartient à l'axe des abscisses.

2) Pour tout point M du plan distinct de A et B, démontrer que $\arg(z') = (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) + \dfrac{\pi}{2}$ à 2π près.

3) Etude de deux ensembles de points.
   a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre complexe imaginaire pur.
   b) Soit M d'affixe z un point du cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.
   À quel ensemble appartient le point M' ?