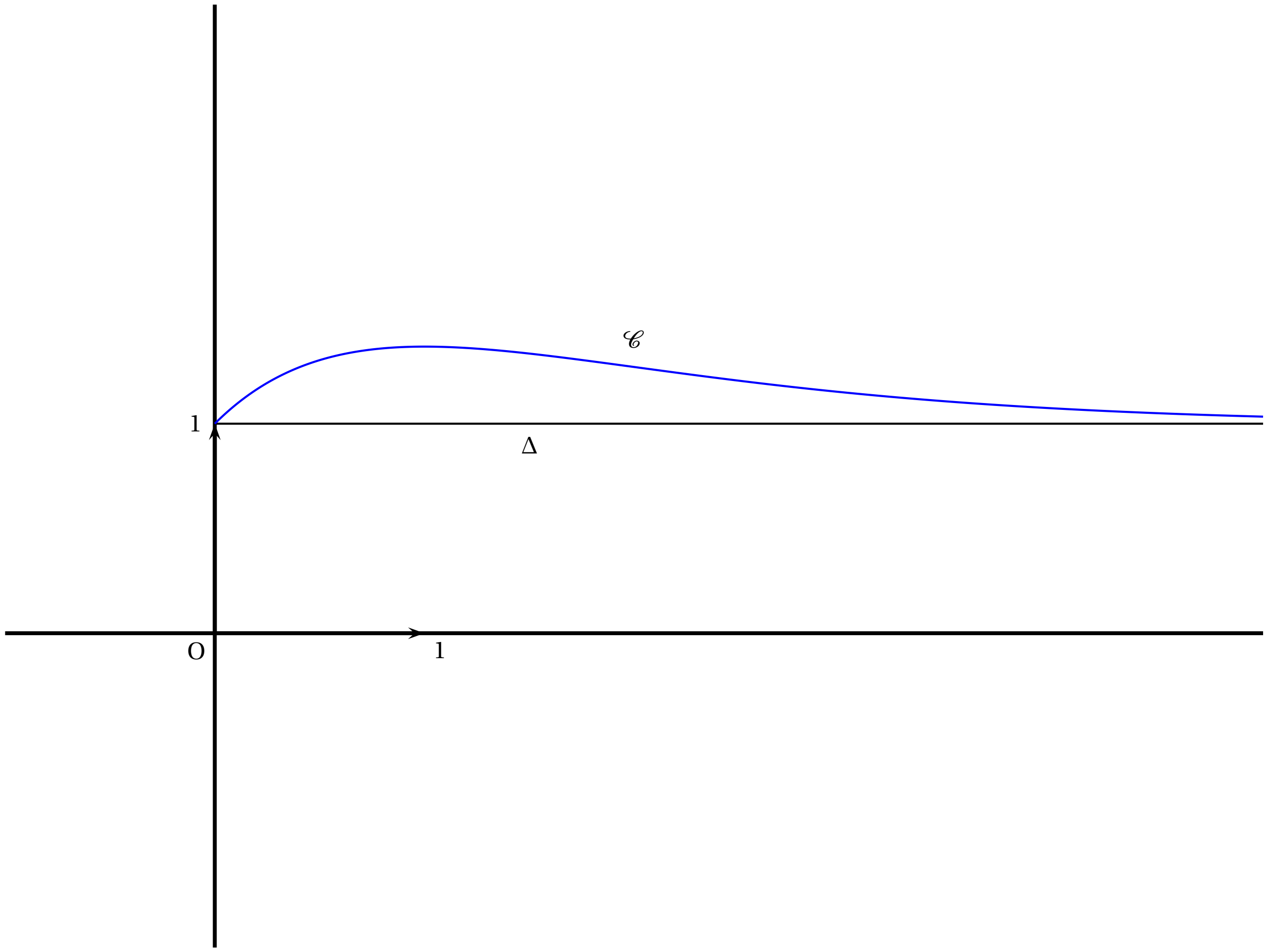
EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x\mathrm{e}^{-x}.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ et la droite Δ d'équation $y = 1$ sont tracées ci-dessous.

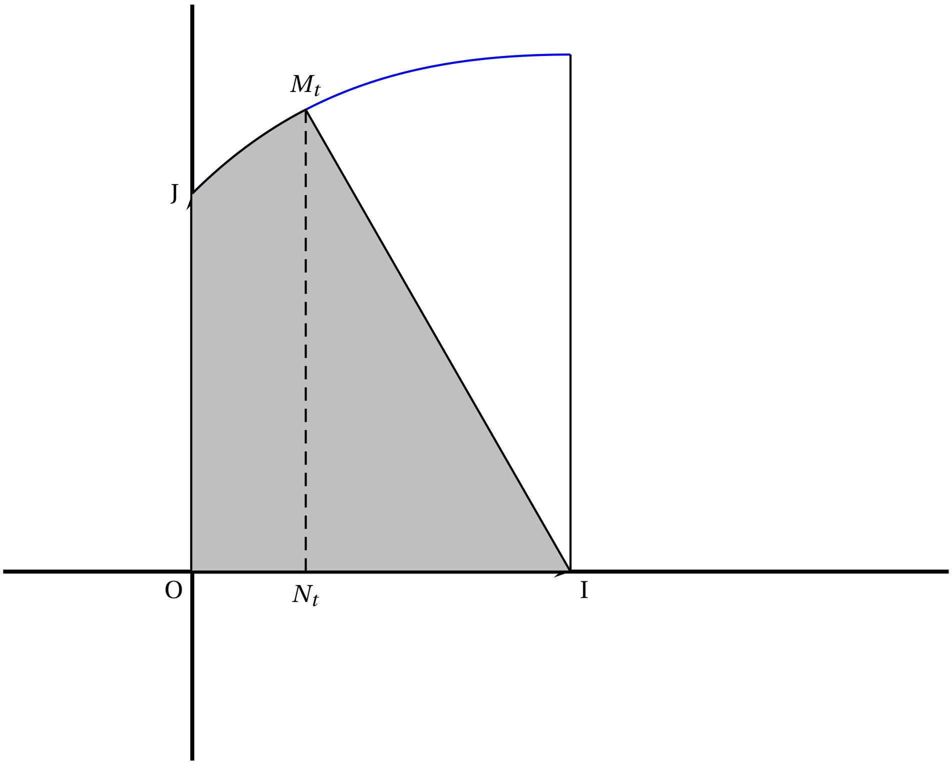


Partie A

1. Justifier les propriétés suivantes constatées sur la représentation graphique.
   a. La droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   b. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.
2. Soit t un nombre réel positif. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.
   a. Interpréter graphiquement cette intégrale.
   b. Montrer que $\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = t - t\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-t} + 1$.

Partie B

On note I le point de coordonnées $(1~;~0)$ et J le point de coordonnées $(0~;~1)$.
Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0~;~1]$, M_t désigne le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse t et N_t le point de coordonnées $(t~;~0)$.
On appelle $\mathscr{D}_t$, le domaine du plan délimité par la droite $(\mathrm{I}M_t)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées la courbe $\mathscr{C}$.
Ce domaine est représenté par la zone grisée du graphique ci-joint. Soit $\mathscr{A}(t)$ la mesure de son aire exprimée en unité d'aire.



1. Interpréter graphiquement $\mathscr{A}(0)$ et donner sa valeur exacte.

2. Interpréter graphiquement $\mathscr{A}(1)$ et donner sa valeur exacte.

3. Calculer l'aire du triangle $M_tN_t\text{I}$.

4. En déduire que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\ 1]$,

$$\mathscr{A}(t) = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + 1\right)\text{e}^{-t}.$$

5. *Dans cette question toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Existe-t-il un unique nombre réel α de l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que

$\mathscr{A}(\alpha) = \dfrac{1}{2} \times \mathscr{A}(1)$?

Justifier la réponse.