

A GENERALITES1- définition

une suite (u_n) est une application de N dans R

on peut définir une suite de façon explicite ou par récurrence

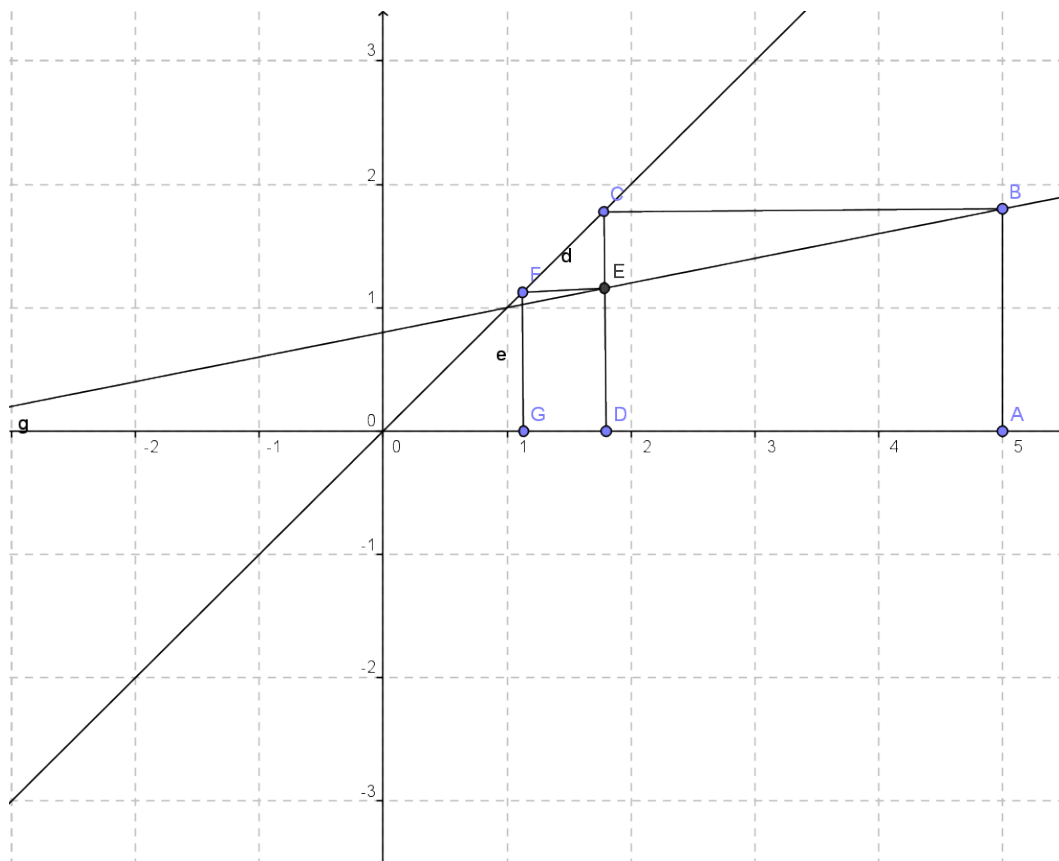
a- on peut définir (u_n) par une relation de la forme $u_n = f(n)$
où f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$

par exemple $u_n = \frac{2n+3}{n^2+1}$

b- on peut définir (u_n) par une relation de récurrence et son premier terme

par exemple $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + 4$

si $u_{n+1} = f(u_n)$ alors on peut construire les premiers termes de (u_n) à l'aide de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x$



2- suites bornées , minorées majorées

une suite (u_n) est minorée ssi il existe un réel m tel que pour tout entier n :

$$m \leq u_n$$

une suite (u_n) est majorée ssi il existe un réel M tel que pour tout entier n :

$$u_n \leq M$$

une suite (u_n) est bornée ssi il existe un réel M et un réel m tel que pour tout entier n :

$$m \leq u_n \leq M$$

3- sens de variation d' une suite

une suite (u_n) est croissante ssi pour tout entier n : $u_n \leq u_{n+1}$

une suite (u_n) est décroissante ssi pour tout entier n : $u_n \geq u_{n+1}$

méthodes :

a- on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$

b- si $u_n = f(n)$ on étudie le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty [$

c- si pour tout entier n , $u_n > 0$, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1

si pour tout entier n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors (u_n) est croissante

si pour tout entier n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors (u_n) est décroissante

B SUITES ARITHMETIQUES

une suite (u_n) est arithmétique ssi il existe un réel r tel que pour tout entier n :

$$u_{n+1} - u_n = r \quad . \quad r \text{ est appelé la raison de la suite arithmétique}$$

pour tout entier n : $u_n = u_0 + n \times r$

pour tout entier p : $u_p = u_n + (p-n) \times r$

somme des termes d' une suite arithmétique

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

en général : $S_n = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{1er terme} + \text{dernier terme})}{2}$

C SUITES GEOMETRIQUES

Une suite (u_n) est géométrique ssi il existe un réel q non nul tel que pour tout entier n :

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad . \quad q \text{ est appelé la raison de la suite géométrique .}$$

pour tout entier n : $u_n = u_0 \times q^n$

pour tout entier p : $u_p = u_n \times q^{p-n}$

somme des termes d' une suite géométrique : pour $q \neq 1$

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

en général : $S_n = (\text{1er terme}) \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

D LIMITES DE SUITES

Une suite (u_n) converge vers un réel α ssi pour tout réel $r > 0$, l'intervalle $[\alpha - r; \alpha + r]$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang

on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \alpha$

par exemple $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ ssi pour tout réel A , $u_n > A$ à partir d'un certain rang

par exemple $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2) = +\infty$

Une suite (u_n) diverge ssi elle n'a pas de limite ou si elle diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$

si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

théorème de comparaison :

si à partir d'un certain rang : $v_n \leq u_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = +\infty$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$

théorème des gendarmes :

si à partir d'un certain rang : $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \alpha$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n) = \alpha$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \alpha$