TS **SUITES**

A GENERALITES

1- définition

une suite (u_n) est une application de N dans R

on peut définir une suite de façon explicite ou par récurrence

a- on peur définir (u_n) par une relation de la forme u_n = f(n)
où f est une fonction définie sur [0 ; +∞ [

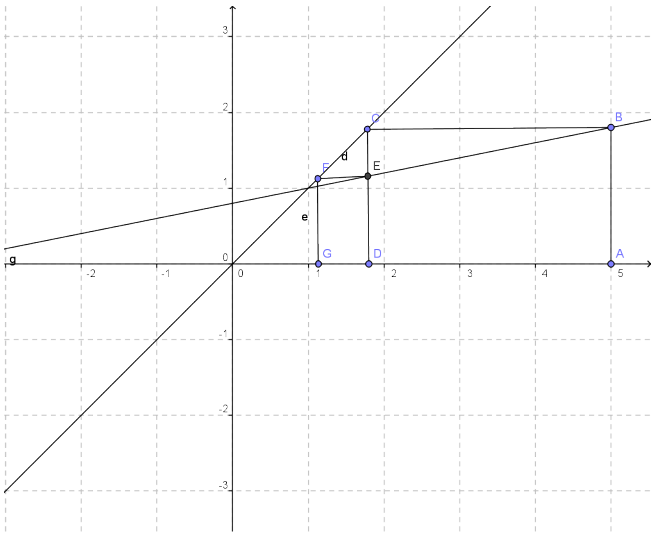
par exemple $u_n = \dfrac{2n+3}{n^2+1}$

b- on peur définir (u_n) par une relation de récurrence et son premier terme

par exemple $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{5} u_n + 4$

si $u_{n+1} = f(u_n)$ alors on peut construire les premiers termes de (u_n) à l' aide de

la courbe représentative de f et de la droite d' équation y = x



2- <u>suites bornées , minorées majorées</u>

une suite (u_n) est minorée ssi il existe un réel m tel que pour tout entier n :

$m \leq u_n$

une suite (u_n) est majorée ssi il existe un réel M tel que pour tout entier n :

$u_n \leq M$

une suite (u_n) est bornée ssi il existe un réel M et un réel m tel que pour tout entier n :

$m \leq u_n \leq M$

3- <u>sens de variation d' une suite</u>

une suite (u_n) est croissante ssi pour tout entier n : $u_n \leq u_{n+1}$

une suite (u_n) est dé croissante ssi pour tout entier n : $u_n \geq u_{n+1}$

<u>méthodes</u> :

a- on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$

b- si $u_n = f(n)$ on étudie le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty [$

c- si pour tout entier n , $u_n > 0$, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1

si pour tout entier n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors (u_n) est croissante

si pour tout entier n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors (u_n) est décroissante

B SUITES ARITHMETIQUES

une suite (u_n) est arithmétique ssi il existe un réel r tel que pour tout entier n :

$u_{n+1} - u_n = r$. r est appelé la raison de la suite arithmétique

pour tout entier n : $u_n = u_0 + n \times r$

pour tout entier p : $u_p = u_n + (p-n) \times r$

somme des termes d' une suite arithmétique

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

en général : $S_n = \dfrac{\textit{nombre de termes} \times (1\text{er}\ \textit{terme} + \textit{dernier terme})}{2}$

C SUITES GEOMETRIQUES

Une suite (u_n) est géométrique ssi il existe un réel q non nul tel que pour tout entier n :

$u_{n+1} = q \times u_n$. q est appelé la raison de la suite géométrique .

pour tout entier n : $u_n = u_0 \times q^n$

pour tout entier p : $u_p = u_n \times q^{p-n}$

somme des termes d' une suite géométrique : pour q ≠ 1

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

en général : $S_n = (1\text{er}\ \textit{terme}) \times \dfrac{1-q^{\textit{nombre de termes}}}{1-q}$

D LIMITES DE SUITES

Une suite (u_n) converge vers un réel α ssi pour tout réel r > 0 , l intervalle [α - r ; α + r] contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d' un certain rang

on note $\lim_{n \to +\infty} (u_n) = \alpha$

par exemple $\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{n}) = 0$

Une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ ssi pour tout réel A , $u_n > A$ a partir d' un certain rang

par exemple $\lim_{n \to +\infty} (n^2) = +\infty$

Une suite (u_n) diverge ssi elle n' a pas de limite ou si elle diverge vers $+\infty$ ou - $+\infty$

si q > 1 alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

si -1 < q < 1 alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$

théorème de comparaison :

si à partir d' un certain rang : $v_n \leq u_n$ et si $\lim_{n \to +\infty} (v_n) = +\infty$

alors $\lim_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$

théorème des gendarmes :

si à partir d' un certain rang : $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si $\lim_{n \to +\infty} (v_n) = \alpha$

et $\lim_{n \to +\infty} (w_n) = \alpha$ alors $\lim_{n \to +\infty} (u_n) = \alpha$

si une suite (u_n) est croissante et non majorée alors elle diverge vers $+\infty$

si une suite (u_n) est décroissante et non minorée alors elle diverge vers $-\infty$

si une suite (u_n) est croissante et majorée alors elle convergente

si une suite (u_n) est décroissante et minorée alors elle convergente

si u_{n+1} = f(u_n) , si (u_n) converge vers α , si f est continue en α

alors α est solution de l' équation f(x) = x

E SUITES ADJACENTES

les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes ssi (u_n) est croissante ,

(v_n) est décroissante (ou bien le contraire) et $\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$

si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles sont convergentes et ont la même limite