

## Exercice

On considère la suite  $(u_n)$  définie par son premier terme  $u_0 = 3$  et la relation  $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$ .

1- Calculer  $u_1$  et  $u_2$ . La suite  $(u_n)$  est-elle arithmétique ou géométrique ?

2-

Soit  $f$  la fonction pour laquelle on a

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

a) Exprimer  $f(x)$  en fonction de  $x$ .

b) La figure donne la représentation graphique de  $f$  sur ainsi que la droite d'équation

$$y = x.$$

Compléter cette figure pour faire apparaître les 4 premiers termes de la suite  $u_n$  sur l'axe des abscisses.

c) Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de  $u_n$

3- On pose  $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ .

a) Calculer  $v_0, v_1$  et  $v_2$ . Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de  $v_n$  ?

b) Démontrer la conjecture précédente et en déduire une expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .

c) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ . En déduire la limite de  $u_n$ .

