**EXERCICE 1 (7 points)**

*Commun à tous les candidats*

**Partie A**

La fonction $f$ est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x)=(20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

**1)** Étudier la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

**2)** Étudier les variations de la fonction $f$ et dresser son tableau de variation.

**3)** Établir que l'équation $f(x)=10$ admet une unique solution strictement positive $\alpha$ dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à $10^{-3}$ près de $\alpha$.

**4)** Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

**5)** Calculer l'intégrale $I=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

**Partie B**

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant $t$, $t$ étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel $t$ appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}$.

**1)** Vérifier que la fonction $f$ étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

**2)** On se propose de démontrer que cette fonction $f$ est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

**a)** On note $g$ une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0 ; +\infty[$, vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle : (E′) $y' + \frac{1}{2}y = 0$.

**b)** Résoudre l'équation différentielle (E′).

**c)** Conclure.

**3)** Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

**4)** La valeur $\theta$ en degrés Celsius de la température moyenne de cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

Calculer la valeur exacte de $\theta$, puis donner la valeur approchée décimale de $\theta$ arrondie au degré.