EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point B(1 ; −2 ; 1) et de vecteur normal $\vec{n}(-2 ; 1 ; 5)$ et le plan $\mathscr{R}$ d'équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$.

a) Démontrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont perpendiculaires.

b) Démontrer que l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ est la droite Δ passant par le point C(−1 ; 4 ; −1) et de vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; 1)$.

c) Soit le point A(5 ; −2 ; −1). Calculer la distance du point A au plan $\mathscr{P}$, puis la distance du point A au plan $\mathscr{R}$.

d) Déterminer la distance du point A à la droite Δ.

2) **a)** Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1 + 2t ; 3 - t ; t)$.
Déterminer en fonction de t la longueur AM_t. On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de **R** dans **R**.

b) Étudier le sens de variation de la fonction φ sur **R** ; préciser son minimum.

c) Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.