

**EXERCICE 3 (5 points)**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = (x-1)(2-e^{-x})$ .

Sa courbe représentative  $\mathcal{C}$  est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).

1.
  - a) Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - b) Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x - 2$  est asymptote à  $\mathcal{C}$ .
  - c) Étudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $\Delta$ .
2.
  - a) Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$ .
  - b) En déduire que, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $f'(x) > 0$ .
  - c) Préciser la valeur de  $f'(0)$ , puis établir le tableau de variation de  $f$ .
3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en  $\text{cm}^2$ , du domaine plan limité par la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $\Delta$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 3$ .
4.
  - a) Déterminer le point  $A$  de  $\mathcal{C}$  où la tangente à  $\mathcal{C}$  est parallèle à  $\Delta$ .
  - b) Calculer la distance, exprimée en cm, du point  $A$  à la droite  $\Delta$ .

