EXERCICE 3 (7 points)

La page 6 sera à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x)=x+\ln x$.
On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

   b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution dans $]0,+\infty[$.

   On note α_n cette solution. On a donc : pour tout entier naturel n, $\alpha_n+\ln\alpha_n=n$.

   b) Sur la page 6, on a tracé Γ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
   Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

   c) Préciser la valeur de α_1.

   d) Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.

3. a) Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.
   b) Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=\ln x-x+1$.
   En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.
   c) Tracer Δ sur le graphique de la page 6.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{n+1}{2}\leq\alpha_n$.

   Déterminer la limite de la suite (α_n).

Partie B
On considère une fonction g continue, strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.
On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la partie **A**, définir sur **N** une suite (β_n) de réels tels que $g(\beta_n)=n$, et que cette suite est strictement croissante.

1. Démonstration de cours :

   Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.
   « une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».

   Démontrer le théorème suivant : *une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.*

2. Montrer que la suite (β_n) tend vers $+\infty$.

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Exercice 3