Exercice 2 *(5 points)*

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1-2i$, par B le point d'affixe $z_B = -2+2i$ et par $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$.

On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle $(\mathcal{C})$ et calculer son rayon.

2. Soit D le point d'affixe $z_D = \dfrac{3+9i}{4+2i}$.
   Écrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathcal{C})$.

3. Sur le cercle $(\mathcal{C})$, on considère le point E, d'affixe z_E, tel qu'une mesure en radians de $(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega E})$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

   a. Préciser le module et un argument de $z_E + \dfrac{1}{2}$.

   b. En déduire que $z_E = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}i$.

4. Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

   a. Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

   b. Soit K le point d'affixe $z_K = 2$.
   Déterminer par le calcul l'image de K par r. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

Tournez la page S.V.P.