5MAOSCLR1

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes et sont notées sur un point chacune.
Pour chaque question, il y a exactement deux propositions correctes. Le candidat doit indiquer sur sa copie les deux propositions vraies. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point, chaque réponse fausse enlève 0,25 point. Donner trois propositions ou plus à une question, ou bien n'en donner aucune, ne rapporte aucun point.
Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1) Les suites suivantes sont convergentes :

a) $\left(\dfrac{2^n}{n^{2005}}\right)_{n>0}$ **b)** $\left(\dfrac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **c)** $\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)_{n>0}$ **d)** $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$

2) On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) ayant, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=-1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n)=1$.

Alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

b) La suite (v_n) est minorée.

c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 \leqslant v_n \leqslant 1$.

d) On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

3) Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1{,}5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$

a) La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y=x$ et $y=2x-1$.

b) La suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$, est géométrique.

c) La suite (v_n) est majorée.

d) La suite (w_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln(u_n - 1)$, est arithmétique.

4) Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies pour $n > 0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \text{ et } y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}. \text{ Alors :}$$

a) Les suites (x_n) et (y_n) sont toutes les deux croissantes.

b) $x_3 = \dfrac{19}{20}$ et $y_3 = \dfrac{37}{60}$.

c) Les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas majorées.

d) Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.