Exercice 2 *(5 points)*

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que:

$$z' = \frac{3+4i}{5}\bar{z} + \frac{1-2i}{5}.$$

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.

Démontrer que : $\begin{cases} x' = \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$.

2. *a.* Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
b. Quelle est la nature de l'application f ?

3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.
a. Donner une solution particulière (x_0, y_0) appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.
b. Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.

5. On considère les points M d'affixe $z=x+iy$ tels que $x=1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'.
Déterminer les entiers y tels que $\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

Tournez la page S.V.P.

5MASSIN1