

**EXERCICE 2 (5 points)**

On considère la suite  $(u_n)$  d'entiers naturels définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases}$$

1. Calculer  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$ .  
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de  $u_n$  ?
2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$ .  
En déduire que pour tout entier naturel  $k$ ,  $u_{2k} \equiv 2$  et  $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$ .
3. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2u_n = 5^{n+2} + 3$ .  
b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$ .
4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de  $u_n$  suivant les valeurs de  $n$ .
5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite  $(u_n)$  est constant. Préciser sa valeur.