EXERCICE 4 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$. Unité graphique : 2 cm.

1. On rappelle que, pour tous nombres complexes a et b, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
   Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation $z^3 = 8$.

2. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c définies par :
   $a = 2$, $b = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

   On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

   On pose B' = r'(B) et C'= r(C) et on note b' et c' les affixes respectives de B' et C'.

   a) Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Dans la suite de l'exercice, on complètera cette figure.

   b) Montrer que $b' = 2 + \sqrt{3} + 3\mathrm{i}$.

   c) Montrer que b' et c' sont des nombres conjugués.

3. On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments [CB], [BB'], [B'C'] et [C'C]. On note m, n, p et q leurs affixes.

   a) Montrer que l'affixe n du point N est égale à $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)$.

   En déduire que les points O, N et C sont alignés.

   b) Montrer que $n + 1 = \mathrm{i}\,(q+1)$. Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ ?

   c) Montrer que le quadrilatère MNPQ est un carré.