Exercice 4 *(6 points)*

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leqslant 0,95 u_n \textit{ si et seulement si } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$.

   a. Étudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f.
   b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1,+\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.
   c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que : $n_0 - 1 \leqslant \alpha \leqslant n_0$.
   d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$$

3. *a.* Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.
   b. Que peut-on en déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 0,95^{n-16} u_{16}.$$

   En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5MAOSIN1