

**Exercice 4 (6 points)****Commun à tous les candidats**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$ . On définit ainsi une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

1. Prouver, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leq 0,95 u_n \text{ si et seulement si } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $[1, +\infty[$  par  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}$ .

- Étudier le sens de variation et la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f$ .
- Montrer qu'il existe dans l'intervalle  $[1, +\infty[$  un unique nombre réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 1,9$ .
- Déterminer l'entier naturel  $n_0$  tel que :  $n_0 - 1 \leq \alpha \leq n_0$ .
- Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

- Déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$  à partir du rang 16.
  - Que peut-on en déduire pour la suite ?
- En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 16, l'encadrement :

$$0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16} u_{16}.$$

En déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .