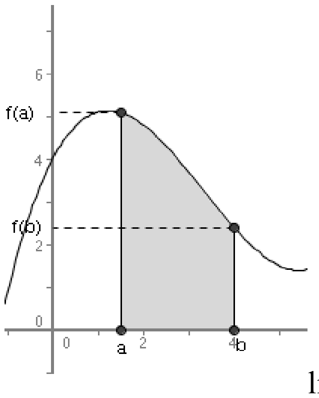
INTEGRALES

Intégrale d'une fonction continue

Fonctions continues positives



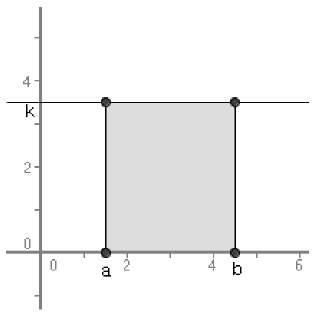
Le plan est muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité d'aire (en abrégé u.a) est donnée par l'aire du rectangle *OIKJ* avec *I*(1,0), *J*(1,0) et *K*(1,1).
Soit *f* une fonction continue et positive sur [*a* ; *b*] (avec a≤b).
On appelle intégrale de *a* à *b* de la fonction *f* l'aire du domaine limité par la courbe représentative de *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations *x*=*a* et *x*=*b*.

Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)dx$.

- lire somme de a à b de f(x) dx.
- *a* et *b* sont les bornes de l'intégrale.
- le domaine mesuré est appelé domaine associé à *f* sur [*a* ; *b*]
- la lettre x est une variable muette, elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre; on a ainsi $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$.

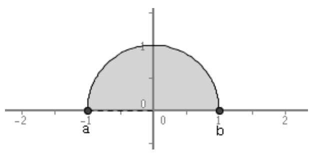
Exemples

- Si *k* est une constante positive, le domaine associé à la fonction *f*(*x*) = *k* sur [*a*,*b*] est un rectangle de largeur *b*-*a* et de hauteur *k*, donc $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$.



- Soit *f* la fonction définie sur [-1;1] par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Sa courbe représentative est un

- demi-cercle de rayon 1. On en déduit que $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.



Valeur moyenne d'une fonction continue positive

> Soit *f* une fonction continue et positive sur [*a ; b*] (avec a < b).
>
> La valeur moyenne de *f* sur [*a* ; *b*] est le réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Remarque

$\int_a^b f(x)dx=\mu(b-a)=\int_a^b \mu dx$; μ et $b-a$ sont les dimensions d'un rectangle qui a la même aire que le domaine associé à *f* sur [a ; b].

Extension aux fonctions de signe quelconque

> Si *f* est une fonction continue négative sur [a ; b], on appelle intégrale de a à b de f l'opposé de l'aire du domaine limité par la courbe représentative de *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.
>
> Si *f* est une fonction continue qui change de signe sur [a ; b], on décompose [a ; b] en intervalles sur lesquels la fonction f a un signe constant et on appelle intégrale de a à b de f la somme des intégrales de *f* sur ces intervalles.

.

Inversion des bornes

> Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I contenant les réels a et b, avec $a \leqslant b$.
>
> On pose $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$.

Remarque

On a $\int_a^a f(x)dx=0$.

Propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles

> Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I contenant les réels a, b et c. Alors :
>
> $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$.

Linéarité

> Soient *f* et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b, et soit k un réel.
>
> Alors, $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ et $\int_a^b k f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$.

.

Inégalités

> Soient *f* et g deux fonctions continues sur [a ; b] avec $a \leqslant b$.

- Positivité : si f est positive sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.
- Intégration d'une inégalité : si $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.
- Inégalités de la moyenne : si pour tout x de $[a\,;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$.

  Si μ est la valeur moyenne de f, on a $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Primitive d'une fonction

Notion de primitive

> Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que pour tout x de I : $F'(x) = f(x)$.

Exemple

La fonction x^2 est une primitive de $2x$ car $(x^2)' = 2x$. Les fonctions x^2+5 ou x^2-3 sont d'autres primitives de $2x$.

Propriétés

- Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I, alors :
  - pour tout réel k, la fonction G définie par $G(x)=F(x)+k$ est une primitive de f sur I
  - toute primitive de f est du type $F(x)+k$.
- Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.
  Soit x_0 un réel de I et y_0 un réel quelconque.
  Il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant la condition initiale $y_0 = F(x_0)$.

Exemple

Déterminer la primitive F de x+3 qui s'annule pour x=2.

Une primitive de $x+3$ est $\frac{x^2}{2}+3x$. On a donc $F(x)=\frac{x^2}{2}+3x+k$. Comme $F(2)=0$, on en déduit que : $\frac{2^2}{2}+3\times 2+k=0$, soit 8 + k = 0 et donc k = -8. Ainsi $F(x)=\frac{x^2}{2}+3x-8$.

Intégrale et primitive

> Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a un réel de I.
>
> La fonction F définie sur I par $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f; c'est l'unique primitive qui s'annule en a.

On en déduit le **théorème fondamental du calcul intégral** :

> Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b, admettant F comme primitive.
>
> On a alors : $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$.
>
> Notation : la différence $F(b)$ - $F(a)$ peut se noter $[F(x)]_a^b$.

Exemple

Calculer $\int_{-2}^{4}(x+2)\,dx$.

Comme la fonction F définie par $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x$ est une primitive de $x+2$, on a

$\int_{-2}^{4}(x+2)\,dx=F(4)-F(-2)=\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{4}=16-(-2)=18$.

Tableau de primitives

Fonctions usuelles

fonction	***primitive***	***intervalle***
a (constante)	ax	$\mathbb{R}$
x^n (n entier relatif différent de -1)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	ln x	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
sin x	- cos x	$\mathbb{R}$
cos x	sin x	$\mathbb{R}$

Opérations, composition

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

fonction	***primitive***
ku' (k réel)	ku
$u'+v'$	$u+v$
$u'e^u$	e^u
$u'u^n$ (n entier différent de -1)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	ln(u) ou ln(-u) selon le signe de u
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$ (u strictement positive)	$2\sqrt{u}$

Exemples

Pour chaque fonction f, déterminer ses primitives.

- $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. En posant $u(x)=x^2+1$, on a $u'(x)=2x$. On en déduit que $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Les primitives de f sont donc de la forme $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(u(x))+k=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+k$.
- .

Intégration par parties

> Soient u et v deux fonctions dérivables et ayant des dérivées continues sur un intervalle I.
>
> Pour tous réels a et b de I : $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$

Exemple

Calculer $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$.

On pose $u'(x)=x$ et $v(x)=\ln x$, d'où $u(x)=\dfrac{x^2}{2}$ et $v'(x)=\dfrac{1}{x}$.

On en déduit que $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}dx$.

$\displaystyle\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e=\frac{e^2}{2}\ln e-\frac{1}{2}\ln 1=\frac{e^2}{2}$ et $\displaystyle\int_1^e\frac{x}{2}dx=\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}$.

Finalement, $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$.

Applications de l'intégrale

Aire d'un domaine compris entre deux courbes

Soient f et g deux fonctions continues telles que $f(x)\leqslant g(x)$ sur l'intervalle $[a\,;b]$.
L'aire du domaine délimité par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est $\displaystyle A=\int_a^b(g(x)-f(x))dx$.

Calcul de volumes

Dans l'espace muni du repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, l'unité de volume est le volume du pavé droit construit à partir des points O, I, J et K avec $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$.
Soit Σ un solide limité par les plans d'équations $z=a$ et $z=b$ avec $a<b$.
Si l'intersection de Σ avec un plan de côte z est une surface dont l'aire est donnée par $S(z)$, alors le volume de Σ est $\displaystyle V=\int_a^b S(z)dz$.