EXERCICE 2 (6 points)

Le graphique de l'annexe figurant page 6 sera complété et remis avec la copie.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;2]$.
   Montrer que si $x \in [1\,;2]$ alors $f(x) \in [1\,;2]$.

2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur **N** par :

   - $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.
   - $v_0=2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=f(v_n)$.

   a) Le graphique donné en annexe représente la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.
   Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
   À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

   b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

   - Pour tout entier naturel n, $1\le v_n \le 2$.
   - Pour tout entier naturel n, $v_{n+1}\le v_n$.

   On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :

   - Pour tout entier naturel n, $1\le u_n \le 2$.
   - Pour tout entier naturel n, $u_n \le u_{n+1}$.

   c) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

   En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n-u_n\ge 0$ et $v_{n+1}-u_{n+1}\le \dfrac{1}{4}(v_n-u_n)$.

   d) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n-u_n\le \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

   e) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.
   Déterminer la valeur exacte de α.

Cette page sera remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Annexe : exercice 2