

CONCOURS D'ADMISSION 2009

## DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

## Endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension infinie

## Première partie

Pour tout nombre réel  $\lambda$ , on désigne par  $T_\lambda$  l'endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbf{C}^2$  représenté par la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$  dans la base naturelle de  $\mathbf{C}^2$  notée  $(e_1, e_2)$ .

1. Construire une base  $(f_{\lambda,1}, f_{\lambda,2})$  de  $\mathbf{C}^2$  telle que chacun des  $f_{\lambda,i}$  ait une composante sur  $e_1$  égale à 1 et, en outre, ayant les propriétés suivantes :

1.a) Si  $|\lambda| > 2$ , il existe un réel  $\mu_\lambda$  de module  $> 1$  tel que

$$T_\lambda f_{\lambda,1} = \mu_\lambda f_{\lambda,1} \quad , \quad T_\lambda f_{\lambda,2} = \mu_\lambda^{-1} f_{\lambda,2} .$$

1.b) Si  $|\lambda| < 2$ , on a une formule analogue, mais où  $\mu_\lambda$  est un nombre complexe de module 1 et de partie imaginaire  $> 0$ , que l'on précisera.

1.c) Si  $\lambda = 2$ , on a

$$T_2 f_{2,1} = f_{2,1} \quad , \quad T_2 f_{2,2} = f_{2,1} + f_{2,2} .$$

1.d) Si  $\lambda = -2$ , on a

$$T_{-2} f_{-2,1} = -f_{-2,1} \quad , \quad T_{-2} f_{-2,2} = f_{-2,1} - f_{-2,2} .$$

## Deuxième partie

On désigne par  $E$  l'espace vectoriel des suites de nombres complexes  $x = (x_k)_{k \in \mathbf{Z}}$  et par  $A$  l'endomorphisme de  $E$  défini par

$$\forall x \in E, \forall k \in \mathbf{Z} \quad , \quad (Ax)_k = x_{k-1} + x_{k+1} .$$

On s'intéresse au noyau de l'endomorphisme  $A - \lambda \text{id}_E$  où  $\lambda$  est un nombre **réel**.

**2.a)** Vérifier qu'un élément  $x$  de  $E$  appartient à  $\text{Ker}(A - \lambda \text{id}_E)$  si et seulement si l'on a

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = T_\lambda^k \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

**2.b)** Préciser la dimension de  $\text{Ker}(A - \lambda \text{id}_E)$ .

**3.** On suppose  $x \in \text{Ker}(A - \lambda \text{id}_E)$  et on note  $\alpha_{\lambda,1}$  et  $\alpha_{\lambda,2}$  les composantes, dans la base  $(f_{\lambda,1}, f_{\lambda,2})$  de  $\mathbf{C}^2$ , du vecteur  $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ . Démontrer les assertions suivantes :

**3.a)** Si  $|\lambda| \neq 2$ , on a

$$x_k = \mu_\lambda^k \alpha_{\lambda,1} + \mu_\lambda^{-k} \alpha_{\lambda,2}.$$

**3.b)** Si  $\lambda = 2$ , on a

$$x_k = \alpha_{2,1} + (k+1)\alpha_{2,2}.$$

**3.c)** Si  $\lambda = -2$ , on a

$$x_k = (-1)^k (\alpha_{-2,1} + (1-k)\alpha_{-2,2}).$$

**4.** On fixe un entier  $N \geq 2$  et on désigne par  $P_N$  l'ensemble des  $x$  de  $E$  tels que l'on ait  $x_{k+N} = x_k$  pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ .

Dire pour quelles valeurs de  $\lambda$  le sous-espace  $\text{Ker}(A - \lambda \text{id}_E) \cap P_N$  n'est pas réduit à  $\{0\}$  et, dans ce cas, en donner une base.

### Troisième partie

On définit deux sous-espaces vectoriels de  $E$  de la façon suivante :

•  $E_1$  est l'ensemble des éléments  $x$  de  $E$  tels que  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |x_k| < +\infty$  et on le munit de la norme

$$\|x\|_1 = \sum_{k \in \mathbf{Z}} |x_k|.$$

•  $E_\infty$  est l'ensemble des éléments  $u$  de  $E$  tels que  $\sup_{k \in \mathbf{Z}} |u_k| < +\infty$  et on le munit de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{k \in \mathbf{Z}} |u_k|.$$

**5.** Étant donnés  $x \in E_1$  et  $u \in E_\infty$ , on pose

$$\langle x, u \rangle = \sum_{k \in \mathbf{Z}} x_k u_k.$$

Vérifier que, pour tout  $u \in E_\infty$  (resp. tout  $x \in E_1$ ), l'application  $x \mapsto \langle x, u \rangle$  (resp.  $u \mapsto \langle x, u \rangle$ ) est une forme linéaire continue sur  $E_1$  (resp. sur  $E_\infty$ ) dont on précisera la norme.

6. Montrer que l'on a  $A(E_1) \subset E_1$ ,  $A(E_\infty) \subset E_\infty$ . Montrer que les endomorphismes  $A_1$  et  $A_\infty$  induits par  $A$  respectivement sur  $E_1$  et  $E_\infty$  sont continus et de norme 2.

7. Démontrer les assertions suivantes :

7.a) Pour tout entier  $n \geq 0$ , tout  $k \in \mathbf{Z}$  et tout  $x \in E$  on a

$$(A^n x)_k = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x_{k-n+2p}$$

et

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |(A^n x)_k| \leq 2^n \sum_{k \in \mathbf{Z}} |x_k|.$$

7.b) Si  $|\lambda| > 2$ , pour tout  $x \in E_1$ , la formule

$$B_\lambda x = \sum_{n \geq 0} \lambda^{-n} A_1^n x$$

a un sens et définit un endomorphisme bijectif  $B_\lambda$  de  $E_1$  dont on précisera l'inverse.

8. Soit  $\lambda$  un nombre réel.

8.a) Déterminer  $\text{Ker}(A_1 - \lambda \text{id}_{E_1})$ .

8.b) Déterminer  $\text{Ker}(A_\infty - \lambda \text{id}_{E_\infty})$ .

9. Dire pour quelles valeurs de  $\lambda$  le sous-espace image de  $A_1 - \lambda \text{id}_{E_1}$  est une partie dense de  $E_1$ .

[On pourra évaluer  $\langle x, u \rangle$  pour  $x \in \text{Im}(A_1 - \lambda \text{id}_{E_1})$  et  $u \in \text{Ker}(A_\infty - \lambda \text{id}_{E_\infty})$ .]

### Quatrième partie

Pour tout élément  $x$  de  $E_1$  on définit comme suit une fonction  $\varphi_x$  d'une variable réelle, continue, de période  $2\pi$  :

$$\varphi_x(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} x_k e^{ikt}.$$

10. Calculer  $\int_0^{2\pi} \varphi_x(t) e^{-int} dt$ , pour  $n \in \mathbf{Z}$ .

11. Calculer  $\varphi_{A_1 x}(t)$ .

12. Calculer  $\varphi_{B_\lambda x}(t)$  pour  $|\lambda| > 2$ .

13. Donner une nouvelle démonstration de la question 8.a).

\* \*

\*

3