

EXERCICE 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = (x-1)(2-e^{-x})$.

Sa courbe représentative \mathcal{C} est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).

1.
 - a) Étudier la limite de f en $+\infty$.
 - b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à \mathcal{C} .
 - c) Étudier la position relative de \mathcal{C} et Δ .
2.
 - a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.
 - b) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.
 - c) Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variation de f .
3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe \mathcal{C} , la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
4.
 - a) Déterminer le point A de \mathcal{C} où la tangente à \mathcal{C} est parallèle à Δ .
 - b) Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ .

