Exercice 2 (*5 points*)
Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Etant donné un entier naturel $n \geq 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo 2^n.

Partie A : Etude de deux cas particuliers.

1) Dans cette question on suppose $n = 2$. Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.
2) Dans cette question , on suppose $n = 3$.
   a) Soit m un entier naturel .
   Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8 et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

   b) Peut-on trouver trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7$ modulo 8 ?

Partie B : Etude du cas général où $n \geq 3$.
Supposons qu'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo 2^n.

1) Justifier le fait que les trois entiers naturels x, y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs .

2) On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors $x = 2q$, $y = 2r$, $z = 2s + 1$ où q, r, s sont des entiers naturels.
   a) Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1$ modulo 4.
   b) En déduire une contradiction .

3) On suppose que x, y, z sont impairs.
   a) Prouver que, pour tout entier naturel k non nul, $k^2 + k$ est divisible par 2.
   b) En déduire que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3$ modulo 8.
   c) Conclure.