

**EXERCICE 2 (5 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique 2 cm), on considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_A = 2$ ,  $z_B = 1 + i\sqrt{3}$  et  $z_C = 1 - i\sqrt{3}$ .

**Partie A**

1. a) Donner la forme exponentielle de  $z_B$  puis de  $z_C$ .  
b) Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
2. Déterminer la nature du quadrilatère  $OBAC$ .
3. Déterminer et construire l'ensemble  $\mathbf{D}$  des points  $M$  du plan tels que  $|z| = |z-2|$ .

**Partie B**

A tout point  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $z \neq z_A$ , on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  défini par  $z' = \frac{-4}{z-2}$

1. a) Résoudre dans  $\mathbf{C}$  l'équation  $z = \frac{-4}{z-2}$   
b) En déduire les points associés aux points  $B$  et  $C$ .  
c) Déterminer et placer le point  $G'$  associé au centre de gravité  $G$  du triangle  $OAB$ .

2. a) **Question de cours :**

*Prérequis : le module d'un nombre complexe  $z$  quelconque, noté  $|z|$ , vérifie*

*$|z|^2 = z\bar{z}$  où  $\bar{z}$  est le conjugué de  $z$ .*

Démontrer que :

- pour tous nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$ ,  $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- pour tout nombre complexe  $z$  non nul,  $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$

- b) Démontrer que pour tout nombre complexe  $z$  distinct de 2,  $|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$

c) On suppose dans cette question que  $M$  est un point quelconque de  $\mathbf{D}$ , où  $\mathbf{D}$  est l'ensemble défini à la question 3. de la partie A.

Démontrer que le point  $M'$  associé à  $M$  appartient à un cercle  $\Gamma$  dont on précisera le centre et le rayon. Tracer  $\Gamma$ .