EXERCICE 4 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$.

On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $[0,+\infty[$ vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} (1)\ :\ \text{pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0,+\infty[\quad f'(x) = 4-(f(x))^2 \\ \\ (2)\ :\ f(0)=0 \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.
L'annexe, page 6, sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A. Étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f, on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.

On obtient ainsi une suite de points notés (M_n), d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$$\begin{cases} x_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel } n, \quad x_{n+1} = x_n + 0{,}2 \\ y_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel } n, \quad y_{n+1} = -0{,}2\,y_n^{\,2} + y_n + 0{,}8 \end{cases}$$

1. **a)** Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau de l'annexe, page 6. Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.

b) Placer, sur le graphique donné en annexe à la page 6, les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.

c) D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?

2. **a)** Pour x réel, on pose $p(x) = -0{,}2\,x^2 + x + 0{,}8$.
Montrer que si $x \in [0,2]$ alors $p(x) \in [0,2]$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \le y_n \le 2$.

c) Étudier le sens de variation de la suite (y_n).

d) La suite (y_n) est-elle convergente ?

Partie B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = 2\,\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$ et (C_g) sa courbe représentative.

1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).

2. **a)** Montrer que (C_g) admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

b) Étudier les variations de g sur $[0,+\infty[$.

3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à (C_g) à l'origine.

4. Tracer, dans le repère de l'annexe, page 6, la courbe (C_g) et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie **B**.

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Exercice 4 : Annexe

Partie A

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,8000	1,4720					

Partie B