EXERCICE 3 (5 points)

1. On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln x - \dfrac{2}{x}$

On donne ci-dessous le tableau de variation de g.

x	0	$2{,}3$	x_0	$2{,}4$	$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Démontrer **toutes** les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau.

2. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5\ln x}{x}$

a) Démontrer que $f(x_0) = \dfrac{10}{x_0^{\,2}}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau ci-dessus.

b) Soit a un réel. Pour $a > 1$, exprimer $\int_1^a f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de a.

3. On a tracé dans le repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement (C_f) et (C_g).

On appelle I le point de coordonnées (1,0), P_0 le point d'intersection de (C_g) et de l'axe des abscisses, M_0 le point de (C_f) ayant même abscisse que P_0, et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.

On nomme $\mathscr{D}_1$ le domaine du plan délimité par la courbe (C_f) et les segments $[IP_0]$ et $[P_0M_0]$.

On nomme $\mathscr{D}_2$ le domaine du plan délimité par le rectangle construit à partir de $[OI]$ et $[OH_0]$.

Démontrer que les deux domaines $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont même aire, puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire.