

Exercice 2 (5 points)

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité.

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4.

On lit le nombre sur la face cachée.

Pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, on note p_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée.

Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1, p_2, p_3 et p_4 , dans cet ordre, forment une progression arithmétique.

- 1) Sachant que $p_4 = 0,4$ démontrer que $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,2$ et $p_3 = 0,3$.
- 2) On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
 - a) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?
 - b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?
- 3) On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
 - a) Pour $1 \leq i \leq 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'événement $(X = i)$.
 - b) Calculer l'espérance mathématique de X . Interpréter le résultat obtenu.
 - c) Calculer la probabilité de l'événement $(X \geq 1)$. On donnera une valeur arrondie au millièème.
- 4) Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux. On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n -ième lancer.
 - a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.
 - b) Calculer $S_n = \sum_{i=1}^n U_i$ puis étudier la convergence de la suite (S_n) .
 - c) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $S_{n_0} > 0,999$.