Exercice 3 (*6 points*).
Commun à tous les candidats.

On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, (unité graphique : 5 cm).

Partie A. Etude de la fonction f.

1) Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.
2) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
3) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x. En déduire les variations de f sur **R**.
4) Dresser le tableau des variations de f.
5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et ses asymptotes éventuelles dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie B. Quelques propriétés graphiques.

1) On considère les points M et M' de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées du milieu A du segment $[MM']$.
Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}$?

2) Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la droite d'équation $y=1$, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=n$. A_n désigne l'aire du domaine D_n exprimée en unité d'aire.
   a) Calculer A_n.
   b) Etudier la limite éventuelle de A_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C. Calcul d'un volume.

Soit λ un réel positif. On note $\mathscr{V}(\lambda)$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\lambda}^{0}\pi[f(x)]^2\,dx$.

On admet que $\mathscr{V}(\lambda)$ est une mesure, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe $\mathscr{C}$ obtenue pour $-\lambda\le x\le 0$.

1) Déterminer les nombres réels a et b tels que :
pour tout nombre réel x : $\dfrac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\dfrac{ae^x}{e^x+1}+\dfrac{be^x}{(e^x+1)^2}$.
2) Exprimer $\mathscr{V}(\lambda)$ en fonction de λ.
3) Déterminer la limite de $\mathscr{V}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.