

Exercice 4 (5 points)
Commun à tous les candidats

$ABCDEFGH$ est le cube d'arête 1 représenté sur la feuille annexe, qui sera complétée et rendue avec la copie. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Partie A. Un triangle et son centre de gravité.

- 1) Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.
- 2) Soit I le centre de gravité du triangle BDE .
 - a) Calculer les coordonnées de I .
 - b) Démontrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. Que peut-on en déduire pour les points A, I, G ?
- 3) Prouver que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE) .

Partie B. Une droite particulière .

Pour tout nombre réel k , on définit deux points M_k et N_k , ainsi qu'un plan \mathcal{P}_k de la façon suivante :

- M_k est le point de la droite (AG) tel que $\overrightarrow{AM_k} = k\overrightarrow{AG}$;
- \mathcal{P}_k est le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE) ;
- N_k est le point d'intersection du plan \mathcal{P}_k et de la droite (BC) .

- 1) Identifier $\mathcal{P}_{\frac{1}{3}}$, $M_{\frac{1}{3}}$ et $N_{\frac{1}{3}}$ en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$.
- 2) Calcul des coordonnées de N_k .
 - a) Calculer les coordonnées de M_k dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
 - b) Déterminer une équation du plan \mathcal{P}_k dans ce repère.
 - c) En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1; 3k-1; 0)$.
- 3) Pour quelles valeurs de k la droite (M_kN_k) est-elle orthogonale à la fois aux droites (AG) et (BC) ?
- 4) Pour quelles valeurs de k la distance M_kN_k est-elle minimale ?
- 5) Tracer sur la figure donnée en annexe, la section du cube par le plan $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}$.

Tracer la droite $\left(M_{\frac{1}{2}}N_{\frac{1}{2}} \right)$ sur la même figure.

Feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie.

