

**Exercice 4 (5 points)**  
Commun à tous les candidats

$ABCDEFGH$  est le cube d'arête 1 représenté sur la feuille annexe, qui sera complétée et rendue avec la copie. L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

**Partie A.** Un triangle et son centre de gravité.

- 1) Démontrer que le triangle  $BDE$  est équilatéral.
- 2) Soit  $I$  le centre de gravité du triangle  $BDE$ .
  - a) Calculer les coordonnées de  $I$ .
  - b) Démontrer que  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ . Que peut-on en déduire pour les points  $A, I, G$  ?
- 3) Prouver que  $I$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur le plan  $(BDE)$ .

**Partie B.** Une droite particulière.

Pour tout nombre réel  $k$ , on définit deux points  $M_k$  et  $N_k$ , ainsi qu'un plan  $\mathcal{P}_k$  de la façon suivante :

- $M_k$  est le point de la droite  $(AG)$  tel que  $\overrightarrow{AM_k} = k\overrightarrow{AG}$  ;
- $\mathcal{P}_k$  est le plan passant par  $M_k$  et parallèle au plan  $(BDE)$  ;
- $N_k$  est le point d'intersection du plan  $\mathcal{P}_k$  et de la droite  $(BC)$ .

- 1) Identifier  $\mathcal{P}_{\frac{1}{3}}$ ,  $M_{\frac{1}{3}}$  et  $N_{\frac{1}{3}}$  en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance  $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$ .
- 2) Calcul des coordonnées de  $N_k$ .
  - a) Calculer les coordonnées de  $M_k$  dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .
  - b) Déterminer une équation du plan  $\mathcal{P}_k$  dans ce repère.
  - c) En déduire que le point  $N_k$  a pour coordonnées  $(1; 3k-1; 0)$ .
- 3) Pour quelles valeurs de  $k$  la droite  $(M_kN_k)$  est-elle orthogonale à la fois aux droites  $(AG)$  et  $(BC)$  ?
- 4) Pour quelles valeurs de  $k$  la distance  $M_kN_k$  est-elle minimale ?
- 5) Tracer sur la figure donnée en annexe, la section du cube par le plan  $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}$ .

Tracer la droite  $\left( M_{\frac{1}{2}}N_{\frac{1}{2}} \right)$  sur la même figure.

Feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie.

