EXERCICE 1 **6 points**

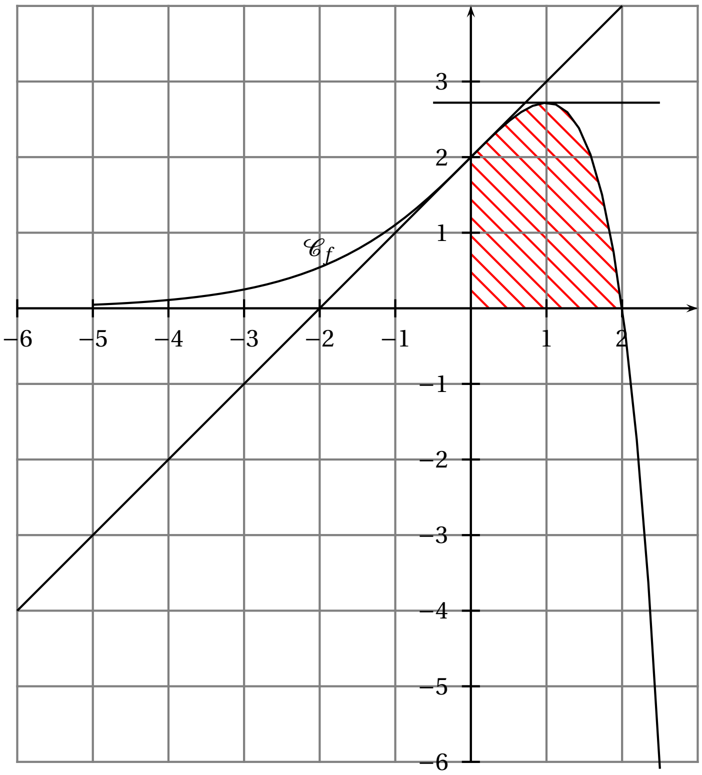
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées. Une seule de ces réponses est exacte.

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5;\frac{5}{2}]$.

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

- La courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentée ci-dessous est celle de la fonction f.
- Les points $A(0;2)$, $B(1;\text{e})$ et $C(2;0)$ appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- Le point de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse -5 a une ordonnée strictement positive.
- La tangente (T) en A à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ passe par le point $D(-2;0)$.
- La tangente en B à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est parallèle à l'axe des abscisses.



Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Partie A : *aucune justification n'est demandée.*

Une réponse exacte rapport 0,5 point.

Une réponse fausse enlève 0,25 point.

L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Si le total des points de la partie A est négatif, la note attribuée à cette partie est ramenée à zéro.

1°) On note $f'(0)$ le nombre dérivé de la fonction f en 0. Quelle est sa valeur ?

(a) $f'(0) = 1$ (b) $f'(0) = 2$ (c) $f'(0) = 0$

La pente de la tangente (T) en A à $(\mathscr{C}_f)$ est (par lecture graphique où en utilisant $\frac{y_A - y_D}{x_A - x_D}$) 1. C'est donc (a) : $f'(0) = 1$.

On note ln la fonction logarithme népérien et g la fonction composée $\ln(f)$.

2°) Quel est l'ensemble de définition de la fonction g, noté $\mathscr{D}_g$?

(a) $]0;\frac{5}{2}[$ (b) $[-5;2]$ (c) $[-5;2[$

$g(x)$ est définie pour tout x tel que $f(x) > 0$, donc sur $[-5;2[$ (réponse (c))

3°) Quelle est la valeur de $g(0)$?

(a) $g(0) = 2$ (b) $g(0) = 0$ (c) $g(0) = \ln(2)$.

$g(0) = \ln(f(0)) = \ln(2)$: réponse (c).

4°) On note g' la fonction dérivée de la fonction g. Quelle est la valeur de $g'(1)$?

(a) $g'(1) = \text{e}$ (b) $g'(1) = 0$; (c) $g'(1) = -\frac{1}{\text{e}^2}$.

$g'(1) = \frac{f'(1)}{f(1)} = 0$ car $f'(1) = 0$ (tangente parallèle à l'axe des abscisses en B). Donc réponse (b).

5°) Quelle est la limite de $g(x)$ quand x tend vers 2 ?

(a) $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -\infty$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$ (c) $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = +\infty$.

Pour $x < 2$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -\infty$ (réponse (a)).

Partie B : *Chaque réponse doit être justifiée.*

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

1°) A quel intervalle appartient le réel $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$?

(a) $[0;3]$ (b) $[3;6]$ (c) $[6;9]$.

Première méthode : I est l'aire de la partie du plan entre la courbe $(\mathscr{C}_f)$, les axes et la droite d'équation $x = 2$. En comptant les carreaux, on en trouve entre 12 et 21 avec 4 carreaux par unité d'aire donc $3 < I < 6$ (réponse (b)).

Deuxième méthode : en supposant avoir répondu correctement à la question 3, $I = F(2) - F(0) \simeq 5$ (avec $F(0) = 3$ et $F(2) \simeq 7.8$ par lecture graphique sur $(\mathscr{C}_1)$).

2°) Parmi les trois courbes jointes en annexes, l'une est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de la fonction f. Laquelle ?

(a) La courbe $(\mathscr{C}_1)$ (b) La courbe $(\mathscr{C}_2)$ (c) La courbe $(\mathscr{C}_3)$.

La fonction f est croissante sur $[-5;1]$ et décroissante sur $[1;2,5]$. La fonction f' doit donc être positive sur [-5 ;1[, nulle en 1 et négative sur $]1;2,5]$: C'est la fonction représentée par $(\mathscr{C}_3)$ (réponse (c)).

3°) Parmi les trois courbes jointes en annexe, l'une est la représentation graphique d'une primitive F de la fonction f, F étant définie sur l'intervalle $[-5;\frac{5}{2}]$. Laquelle ?

(a) La courbe $(\mathscr{C}_1)$. (b) La courbe $(\mathscr{C}_2)$ (c) La courbe $(\mathscr{C}_3)$.

La fonction f est positive sur $[-5;2[$, nulle en 2 et négative sur $]2;2,5]$. La fonction F est donc croissante sur $[-5;2]$ et décroissante sur $[2;2,5]$: c'est la fonction représentée par la courbe $(\mathscr{C}_1)$ (réponse (a)).

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le parc informatique d'un lycée est composé de 200 ordinateurs dont :

- 30 sont considérés comme neufs ;
- 90 sont considérés comme récents ;
- les autres sont considérés comme anciens.

Une étude statistique indique que :

- 5% des ordinateurs neufs sont défaillants ;
- 10% des ordinateurs récents sont défaillants ;
- 20% des ordinateurs anciens sont défaillants.

On choisit au hasard un ordinateur de ce parc.

On note les évènements suivants :

N : « L'ordinateur est neuf » ;

R : « L'ordinateur est récent » ;

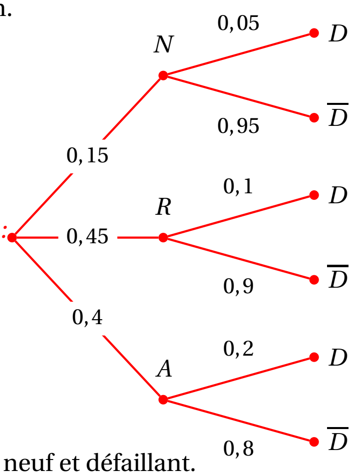
A : « L'ordinateur est ancien » ;

D : « L'ordinateur est défaillant » ;

$\overline{D}$: « L'événement contraire de D.

1°) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

$\dfrac{30}{200} = 0,15$; $\dfrac{90}{200} = 0,45$ et $1 - (0,15 + 0,45) = 0,4$ d'où :



2°) Calculer la probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défaillant.

On cherche $P(N \cap D) = P(N) \times P_N(D) = 0,15 \times 0,05 = 0,0075$.

3°) Démontrer que la probabilité que l'ordinateur choisi soit défaillant est égale à 0,1325.

D'après la formule des probabilités totales, $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap R) + P(D \cap N)$. D'après l'arbre, $P(D \cap A) = 0,4 \times 0,2 = 0,08$ et $P(D \cap R) = 0,45 \times 0,1 = 0,045$ donc, d'après 1°), $P(D) = 0,0075 + 0,045 + 0,08 = 0,1325$.

4°) Déterminer la probabilité que l'ordinateur choisi soit ancien sachant qu'il est défaillant. Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

On cherche $P_D(A) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,08}{0,1325} \simeq 0,60.$

5°) Pour équiper le centre de ressources de l'établissement, on choisit au hasard 3 ordinateurs dans le parc. On admet que le parc est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise.

Déterminer la probabilité qu'exactement un des ordinateurs choisis soit défaillant. Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

On effectue une répétition de trois epreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès (« défaillant ») 0,1325 (d'après 3°) : L'expérience suit donc la loi binomiale de paramètre 3 *et* $0,1325$.

La probabilité d'obtenir exactement un succès est $3 \times 0,1325 \times (1 - 0,1325)^2 \simeq 0,30$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale.

Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité.

L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires : Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.

Au début de la campagne, 20% des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale.

Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10% des personnes préférant Aurore et 15% des personnes préférant Boréale changnet d'avis d'une semaine sur l'autre.

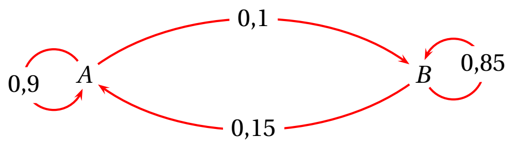
La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.

Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \quad b_n)$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine n.

1°) Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.

$a_0 = 0,2$ *donc* $b_0 = 1 - 0,2 = 0,8$ *et* $P_0 = (0,2 \quad 0,8)$.

2°) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommet A et B, A pour Aurore et B pour Boréale.



3°) (a) Ecrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que la matrice ligne P_1 est égale à $(0,3 \quad 0,7)$.

$P_1 = P_0 M$ *donc* $a_1 = 0,9a_0 + 0,15b_0 = 0,3$ *et* $b_1 = 0,1a_0 + 0,85b_0 = 0,7$.

4°) (a) Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de P_0 et n.

$P_n = P_0 M^n$.

(b) En déduire la matrice ligne P_3. Interpréter ce résultat.

$P_3 = P_0 M^3 = (0,43125 \quad 0.56875)$

Dans la question suivante, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

5°) Soit $P = (a \quad b)$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.

(a) Déterminer a et b.

a et b sont les solutions de $(a \quad b) = (a \quad b)\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.15 & 0.85 \end{pmatrix}$ *telles que* $a + b = 1$, *donc* $\begin{cases} a = & 0,9a + 0,15b \\ b = & 0,1a + 0,85b \end{cases}$ *et* $a + b = 1$ *soit* $\begin{cases} 0,1a = & 0,15b \\ a + b = & 1 \end{cases}$ *d'où* $\begin{cases} a = & 1,5b \\ 2,5b = & 1 \end{cases}$ *et finalement* $a = \dfrac{1,5}{2,5} = 0,6$ *et* $b = \dfrac{1}{2,5} = 0,4$.

(b) Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ? Justifier.

On a montré au (a) qu'après un « certain nombre » de semaines, la probabilté que le parfum Aurore soit préféré se stabilisait à 0,6. Donc la parfum Aurore finira par être préféré au parfum Boréale.

EXERCICE 3 **9 points**

Commun à tous les candidats

On se propose d'étudier l'évolution des ventes d'un modèle de voiture de gamme moyenne depuis sa création en 1999.

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie I

Le tableau suivant donne le nombre annuel, exprimé en milliers, de véhicules vendus les cinq premières années de commercialisation :

Année	1999	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : y_i	81,3	92,3	109,7	128,5	131,2

1°) Dans le plan ($\mathscr{P}$) muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1cm pour une année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 milliers de véhicules vendus sur l'axe des ordonnées, représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i ; y_i\right)$ pour i entier variant de 0à 4.

2°) L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement affine.

(a) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.

$G\,(2;108,6)$

(b) Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite ($\mathscr{D}$) d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

$y = 13,6x + 81,4$

(c) Placer le point G et tracer ($\mathscr{D}$) sur le graphique précédents.

(d) En utilisant l'ajustement affine du (b), donner une estimation du nombre de véhicules vendus en 2007.

En 2007, $x = 8$ et l'ajustement affine donne $y = 190,2$.

3°) Le tableau suivant donne le nombre annuel de véhicules vendus, exprimé en milliers, de 2003 à 2007 :

Année	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année : x_i	4	5	6	7	8
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : y_i	131,2	110,8	101,4	86,3	76,1

(a) Compléter le nuage de points précédent à l'aide de ces valeurs.

(b) L'ajustement précédent est-il encore adapté ? Justifier la réponse.

On remarque que les valeurs décroissent alors que l'ajustement affine est croissant : l'ajustement affine n'est plus adapté.

(c) On décide d'ajuster le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i ; y_i\right)$, pour i variant de 4 à 8, par une courbe qui admet une équation de la forme $y = \mathrm{e}^{cx+d}$.

Déterminer les réels c et d pour que cette courbe passe par les points $A\,(4;131,2)$ et $B(8;76,1)$. On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au millième de chacun de ces nombres réels.

c et d sont donnés par le système

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{4c+d} & = 131,2 \\ \mathrm{e}^{8c+d} & = 76,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4c+d & = \ln(131,2) \\ 8c+d & = \ln(71,6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d & = \ln(131,2) - 4c \\ 4c & = \ln(71,6) - \ln(131,2) \end{cases}$$

d'où $c = 0,25\ln\left(\dfrac{71,6}{131,2}\right) \simeq -0,136$ *et* $d = \ln\dfrac{131,2^2}{71,6} \simeq 5,421.$

Partie II

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[4;0]$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-0,136x+5,421}$.

On suppose que f modélise en milliers l'évolution du nombre annuel de véhicules vendus à partir de l'année 2003.

1°) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[4;10]$.

f est de la forme e^u avec u la fonction affine décroissante $x \longmapsto -0,136x + 5,421$. Donc f a les mêmes variations que u : f est décroissante.

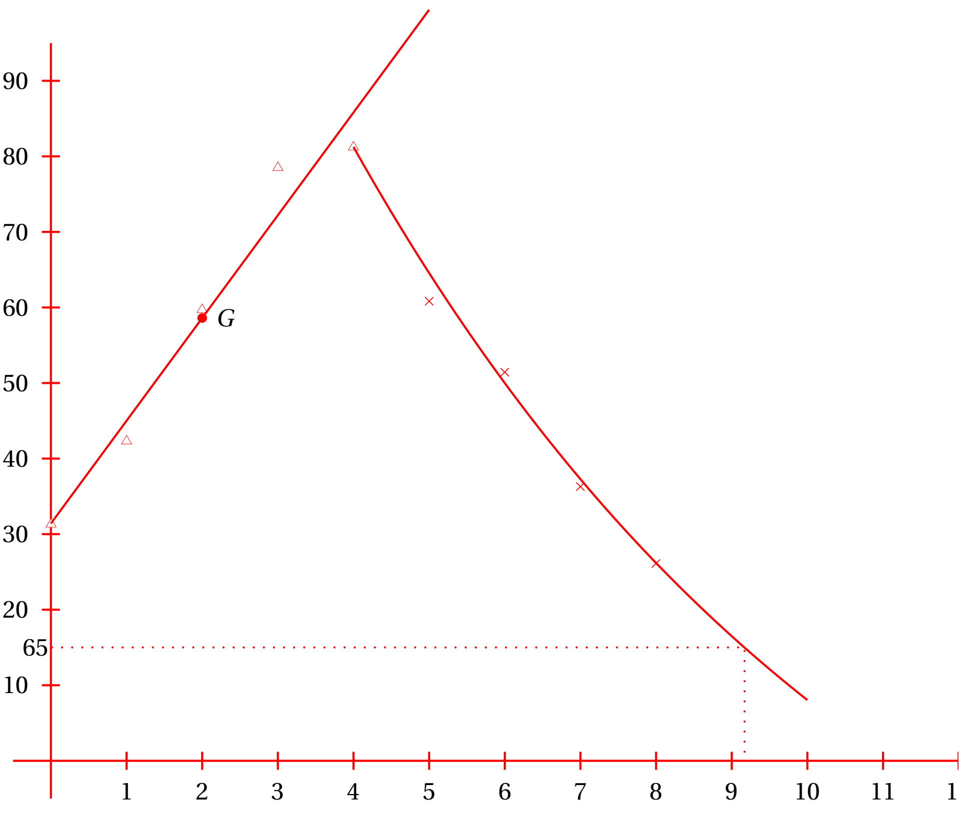
2°) Tracer la courbe ($\mathscr{C}$) représentative de la fonction f dans le même repère que le nuage de points.

3°) L'entreprise décide d'arrêter la fabrication du modèle l'année où le nombre annuel de véhicules vendus devient inférieur à 65 000.

(a) Résoudre algébriquement dans l(intervalle $[4;10]$ l'inéquation $f(x) \leqslant 65$. En quelle année l'entreprise doit-elle prévoir cet arrêt ?

$f(x) \leqslant 65 \Leftrightarrow -0,136x + 5,421 \leqslant \ln(65) \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{5,421 - \ln(65)}{0,136} \simeq 9,17$. *L'arrêt devra donc être prévu au cours de l'année 2008.*

(b) Retrouver graphiquement le résultat précédent en laissant apparents les traits de construction nécessaires.



ANNEXE
Exercice 1, Partie B