EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$; unité graphique 2cm.

On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$.

On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$.

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1. Déterminer les points invariants de f, c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.

2. a) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, $(z'-1)(z+1) = -2$.

   b) En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1.

   Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.

3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.

4. Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.

   a) Déterminer la forme exponentielle de $(p + 1)$.

   b) Montrer que le point P appartient au cercle (C).

   c) Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.

   Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.

   d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f.