Exercice 2 (*5 points*)
Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.
On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0$ modulo p ».

Partie A. Quelques exemples.

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.
2) Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3) Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17.
   En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
4) Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?
5) A l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B. Divisibilité par un nombre premier.

Soit p un nombre premier différent de 2.

1) Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $4^n \equiv 1$ modulo p.
2) Soit $n \geq 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1$ modulo p. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1$ modulo p, et r le reste de la division euclidienne de n par b.
   a) Démontrer que $4^r \equiv 1$ modulo p. En déduire que $r = 0$.
   b) Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.
   c) En déduire que b divise $p - 1$.